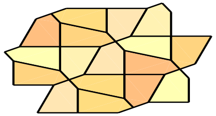
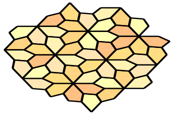
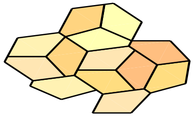
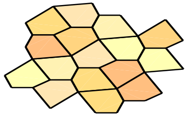
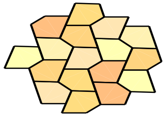
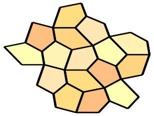
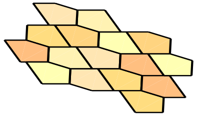
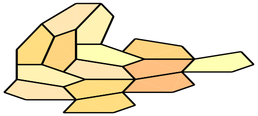
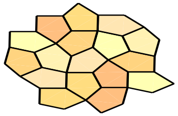
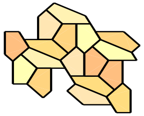
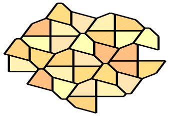
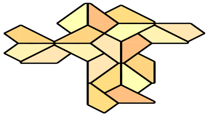
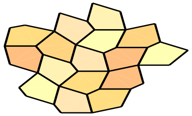
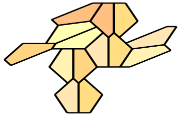
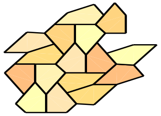
Pavages au Lycée Germaine Tilion

Jean-Claude Yakoubsohn

Centre National de la Retraite Scientifique

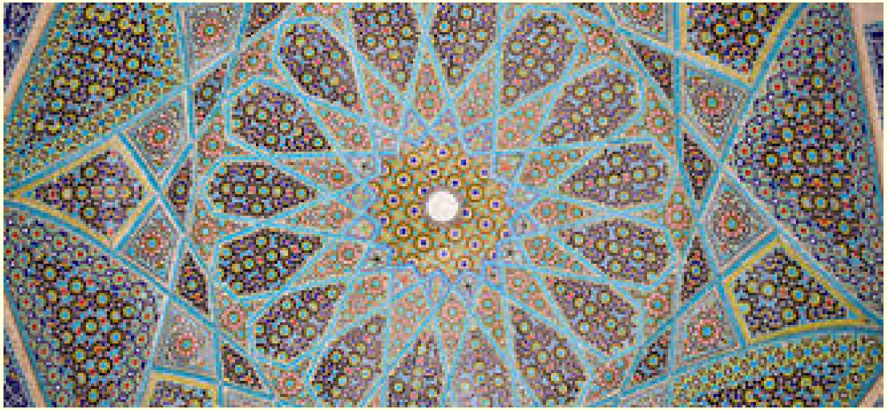






Pavages

Résumé. Regarde!

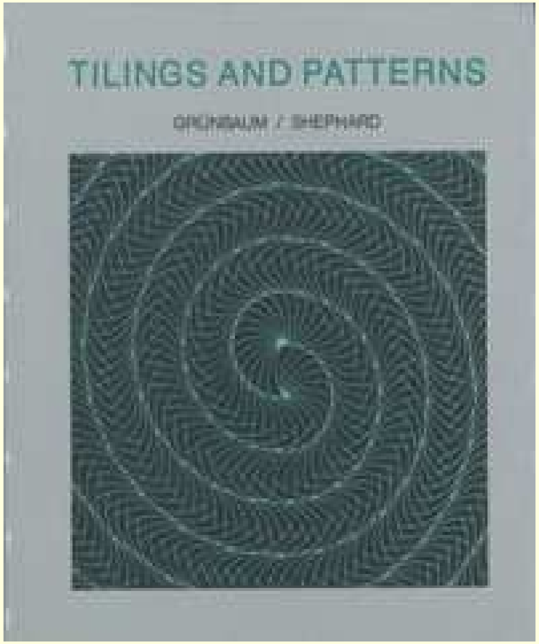
Alhambra



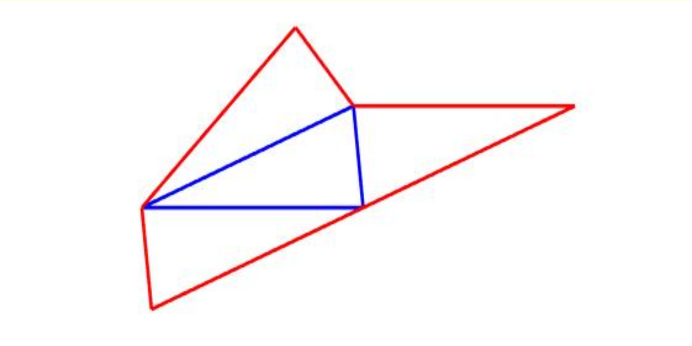
Pavage à l'Alhambra

Quartier du Caire

Pavage "Cairo"

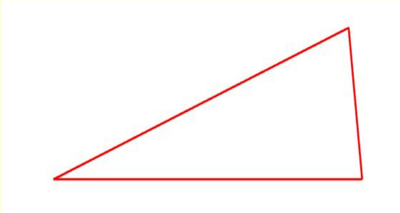


Branko Grünbaum – G. C. Shephard

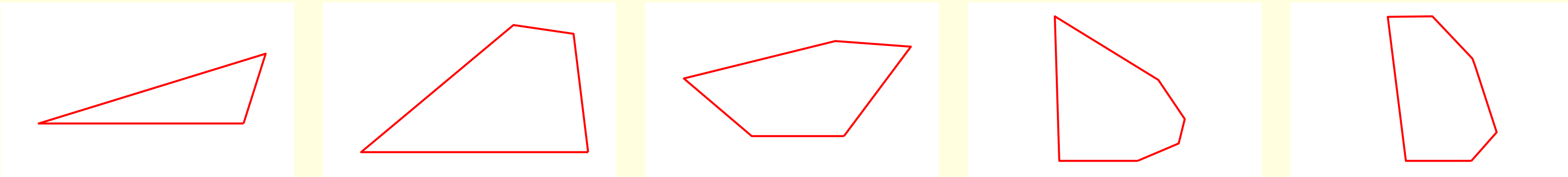


Convexe

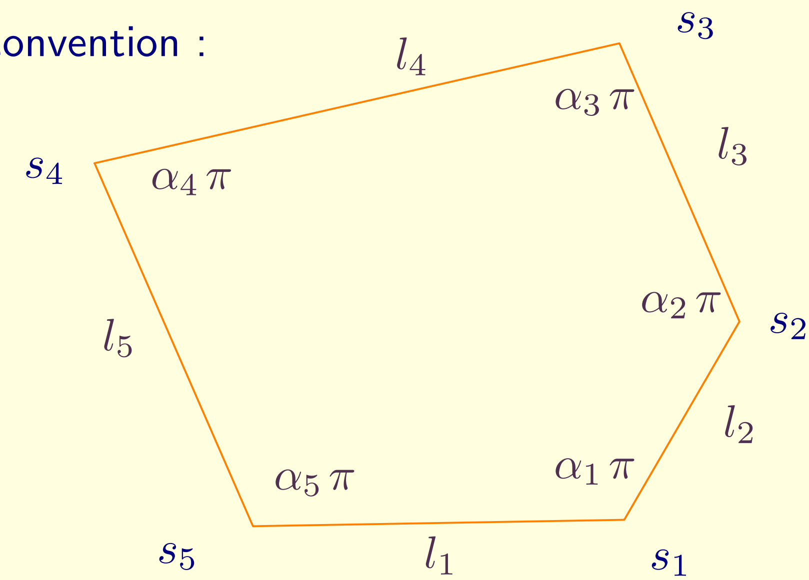
Non convexe



Question : peut-on paver le plan par des polygones convexes?

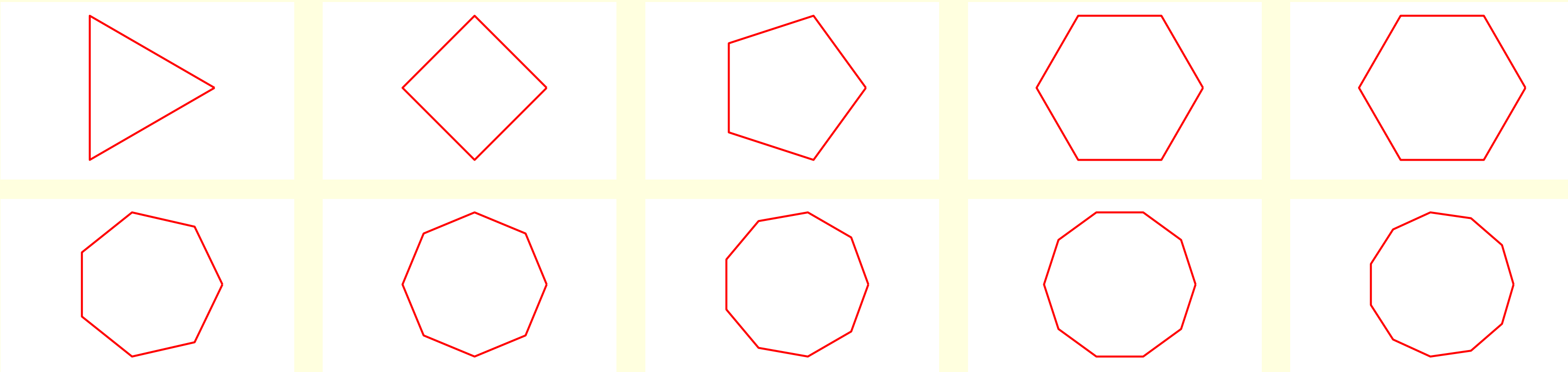


Convention :

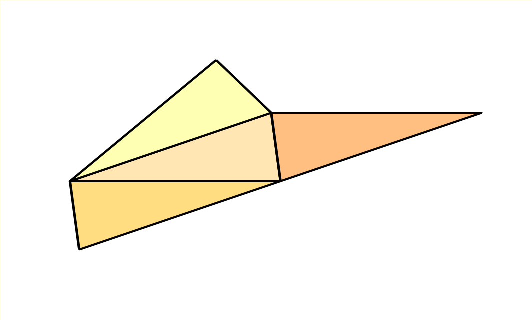


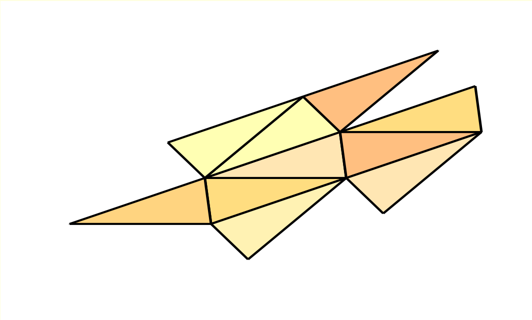
En général si n est le nombre de cotés du polygone on a :

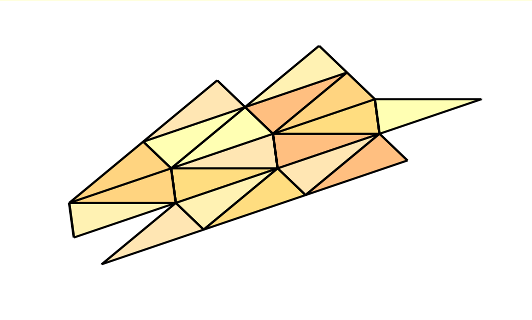
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = n - 2$$

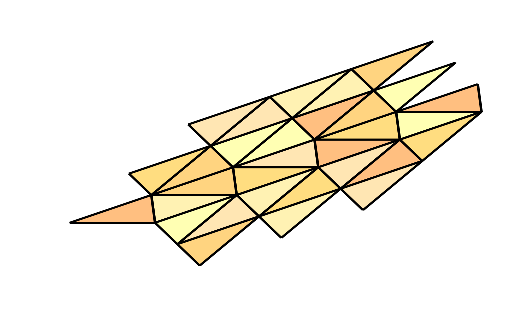


Angle au sommet d'un polygone régulier : $\left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi$





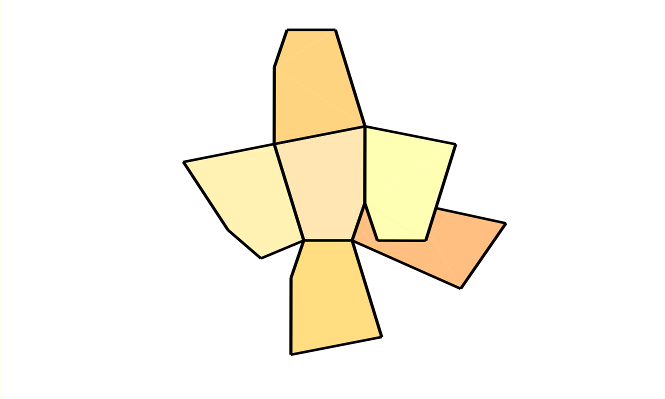


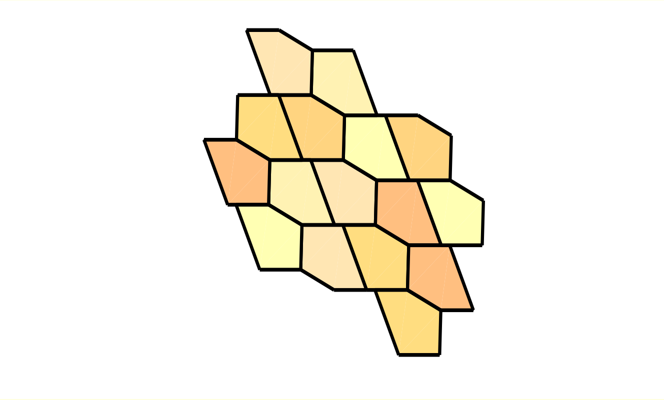


Tout triangle peut paver le plan!

Donc, tout quadrilatère peut paver le plan!

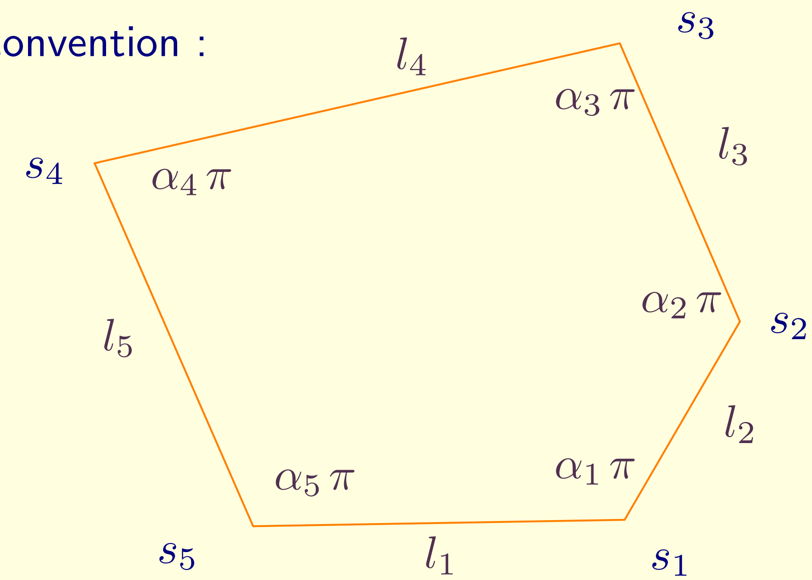
Il est possible de paver le plan par des pentagones . Mais pas avec n'importe quel pentagone!





$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$$

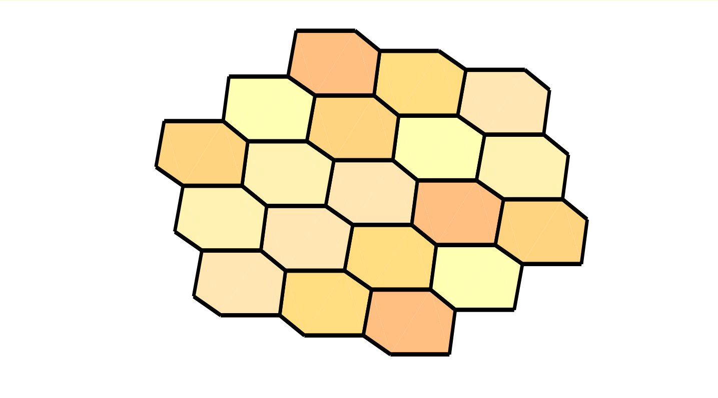
Convention :



En général si n est le nombre de cotés du polygone on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = n - 2$$

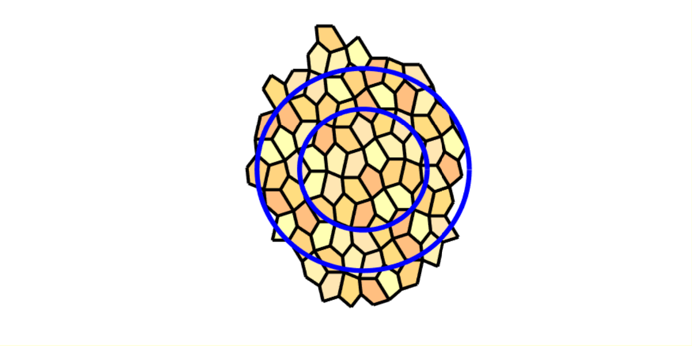
Certains types d'hexagones seulement peuvent paver le plan. Par exemple :



$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 = 2$ et $l_1 = l_4$

Le rêve s'arrête ici.

Il n'est pas possible de paver le plan avec des polygones convexes possédant sept cotés ou plus.



Preuve. Soit $n \geqslant 7$ le nombre de côtés d'un polygone du pavage. Soit N(R) le nombre de polygones dont l'intersection est non vide avec un cercle de rayon R. En notant A l'aire du polygone, il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que :

$$\pi R^2 \leqslant N(R)\,A \leqslant \pi\,(R+k)^2$$

La somme des angles qui entourent les sommets vérifient $N(R)(n-2)\,\pi \leqslant 2\,\pi\,S$ où S est le nombre de sommets des polygones inclus le cercle de rayon $R+k$. Puique le nombre de polygones en un sommet du pavage est plus grand ou égal à 3, on a simultanément

$$(n-2)\,N(R) \leqslant 2S \quad \text{et} \quad 3\,S \leqslant n\,N(R+k)$$

où k est un entier assez grand. Donc

$$\frac{N(R)\,(n-2)}{2} \leqslant S \leqslant \frac{n\,N(R+k)}{3}$$

On en déduit

$$\boldsymbol{\frac{(n-2)}{2}\,\pi\,R^2} \;\leqslant\; \frac{N(R)\,(n-2)\,A}{2} \;\leqslant\; \frac{n\,N(R+k)\,A}{3} \;\leqslant\; \boldsymbol{\frac{n}{3}\,\pi\,(R+k)^2}$$

Il s'ensuit si $n \geqslant 7$

$$\frac{R^2}{(R+k)^2} \;\leqslant\; \frac{2\,n}{3\,(n-2)} \leqslant \frac{14}{15}$$

ce qui aboutit à une contradiction.

Les seuls polygones convexes réguliers qui peuvent paver le plan sont le triangle équilatéral, le carré et l'hexgone régulier.

Preuve. L'angle d'un polygone régulier de n cotés est égal à

$$\pi(1-2/n).$$

Donc, si k est le nombre de polygones ayant un même sommet, il s'ensuit que

$$k\,\pi(1-2/n) \;=\; 2\,\pi$$

Alors

$$2\,(n+k)=k\,n$$

Pappus d'Alexandrie (300 av. JC) savait que les seuls couples $(n,\,k)$ solutions de l'équation précédente sont :

$$(3,6),(4,4),(6,3).$$

Equations polynomiales dont les solutions sont des nombres entiers.

1. Identité de Bézout : $a\,x + b\,y = c$
2. Fermat : $x^n + y^n = z^n$
3. Fermat : $a^x - 1 = y\,p$
4. Euler, Lagrange, Gauss, Kronecker, Kummer, Lejeune Dirichlet

Le dixième problème de Hilbert : décider si une équation diophantienne n'admet pas de solution.

Réponse négative par Yuri Matiyasevich en 1970 : il n'existe pas d'algorithme qui prouve l'inexistence de solutions pour une équation diophantienne.

Pavages avec des hexagones convexes

Quels hexagones convexes pavent le plan?

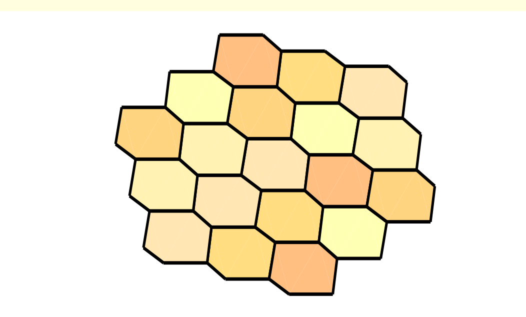
Karl August Reinhardt 1895-1941

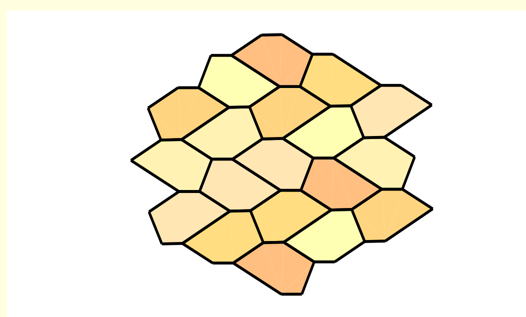
En 1918, Reinhardt soutient sa thèse supervisée par Bieberbach. Il s'agit de caractériser tous les convexes qui peuvent paver le plan. C'est le $18^{\text{ème}}$ problème de Hilbert formulé dans le plan. Son premier résultat est le suivant.

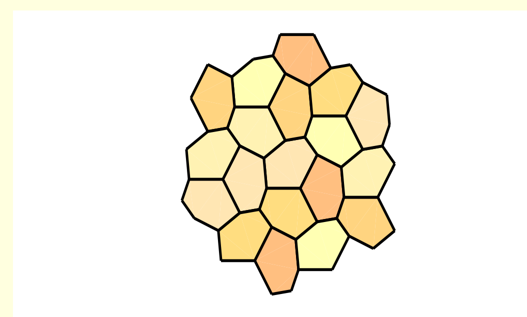
Un hexagone convexe peut paver le plan si et seulement si :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 2 \qquad \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 2/3$$

$l_1 = l_4$ — $l_1 = l_4$ et $l_3 = l_5$ — $l_1 = l_2$, $l_3 = l_4$ et $l_5 = l_6$

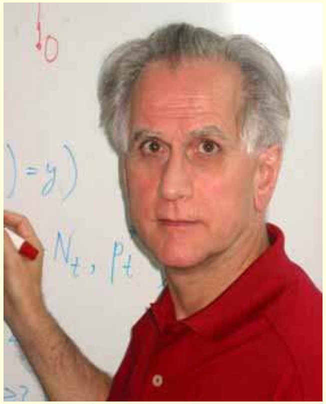






Il paraît qu'elle est difficile à lire.

Un mathématicien hongrois, Belà Bollobas, publia une preuve très concise de ce résultat en 1963.



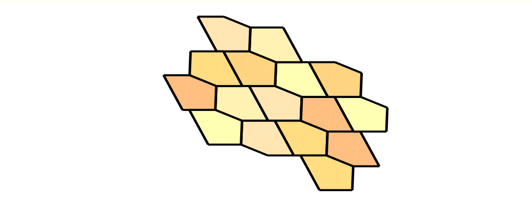
Béla Bollobàs 1943-

Le second résultat de Reinhardt dit que :

Un pentagone convexe peut paver le plan si il satisfait une de ces cinq conditions :

(1)

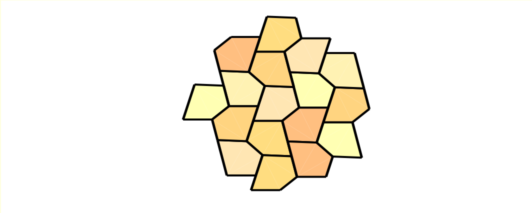
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$



(2)

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 2$

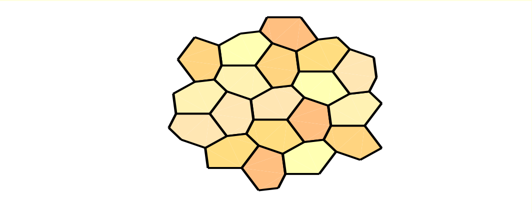
$l_1 = l_4$



(3)

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2/3$

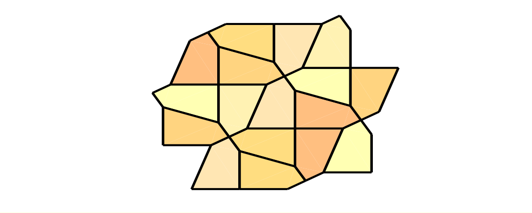
$l_1 = l_2$ et $l_4 = l_3 + l_5$



(4)

$\alpha_1 = \alpha_3 = 1/2$

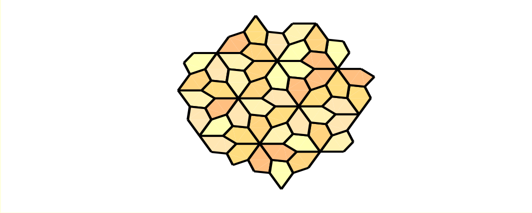
$l_1 = l_2$ et $l_3 = l_4$



(5)

$\alpha_1 = 1/3$, $\alpha_3 = 2/3$

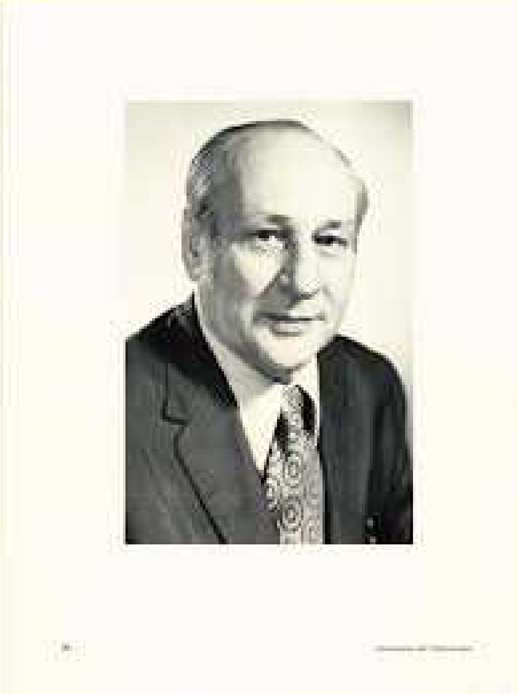
$l_1 = l_2$ et $l_3 = l_4$



En1968, cinquante ans après le résultat de Reinhardt, trois nouvelles familles de pentagones convexes pouvant paver le plan sont découvertes par Kershner, un ingénieur americain. Il prétend que ce problème est enfin résolu .

One of the oldest problems in Euclidean geometry is the problem of delineating those shapes that are suitable for tiles or paving stones in the sense that replications of the given figure can fit together to cover a flat area without gaps oroverlappings. Although the problem is deceptively simple to state, it has proved remarkably refractory. The author has recently succeeded in carrying through a complete determination in the special case of convex polygons. This paper contains a few critical proofs and a complete statement of the results, but not a complete proof for the excellent reason that a complete proof would require a rather large book.

Pas de preuve, pas de place . . . mais joli résultat!



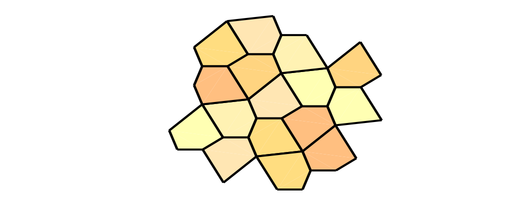
Richard Brandon Kershner 1913-1982

Un pentagone convexe peut paver le plan si et seulement si il vérifie une des conditions (1) à (8) :

(6)

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2\,,\ \alpha_1=2\,\alpha_3$

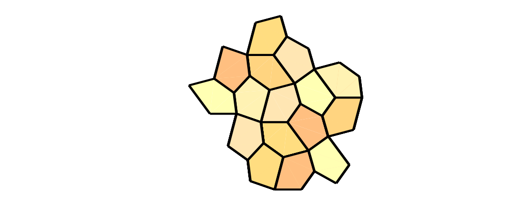
$l_1=l_2=l_5$ and $l_3=l_4$



(7)

$2\,\alpha_2+\alpha_2=2\,\alpha_4+\alpha_1=2$

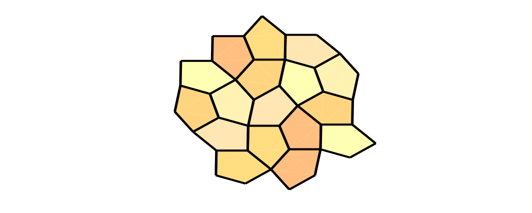
$l_1=l_2=l_3=l_4$



(8)

$2\,\alpha_1+\alpha_2=2\,\alpha_4+\alpha_3=2$

$l_1=l_2=l_3=l_4$



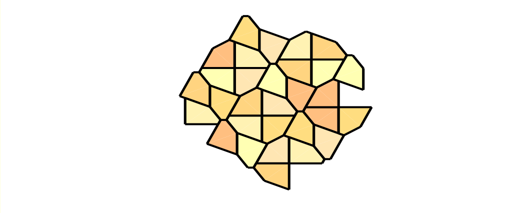
Cette famille de pentagones convexes peut paver le plan :

(9)

$$\alpha_1 + \alpha_4 = 2\,\alpha_3 - \alpha_1 = 1$$

$$2\,\alpha_2 + \alpha_1 = 2$$

$$l_1 = l_2 + l_4 = l_5$$



Le si et seulement si de Kershner sécroule!

Richard James est un informaticien américain.

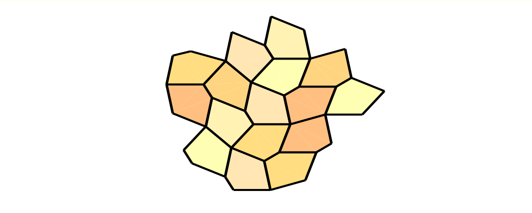
En 1978, Marjorie Rice découvre quatre nouvelles familles.

Ces familles de pentagones convexes peuvent paver le plan :

(10)

$\alpha_2 + 2\,\alpha_5 = \alpha_3 + 2\,\alpha_4 = 2$

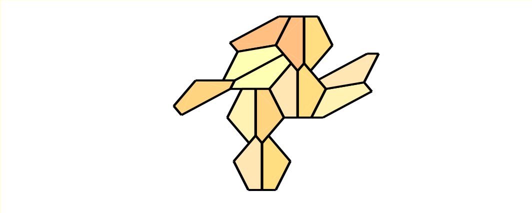
$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l_5$



(11)

$\alpha_2 + 2\,\alpha_5 = \alpha_3 + 2\,\alpha_4 = 2$

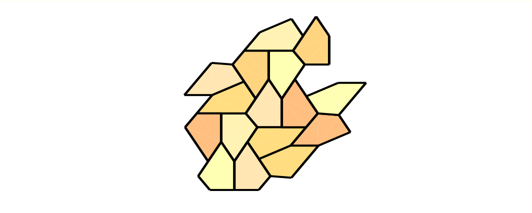
$\alpha_1 - \pi/2$ et $2l_1 + l_3 = l_4 = l_5$



(12)

$\alpha_3 + \alpha_5 = 2\alpha_2 + \alpha_3 = 2$

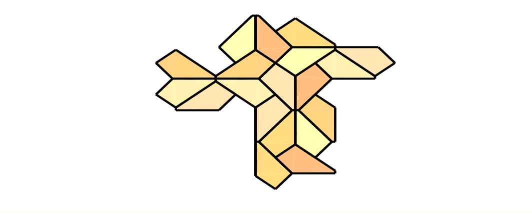
$\alpha_1 - \pi/2$ et $2l_1 = l_3 + l_5 = l_4$



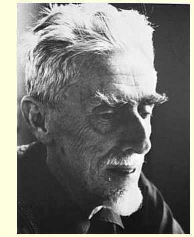
(13)

$2\,\alpha_2 + \alpha_4 = 2\alpha_5 + \alpha_4 = 2$

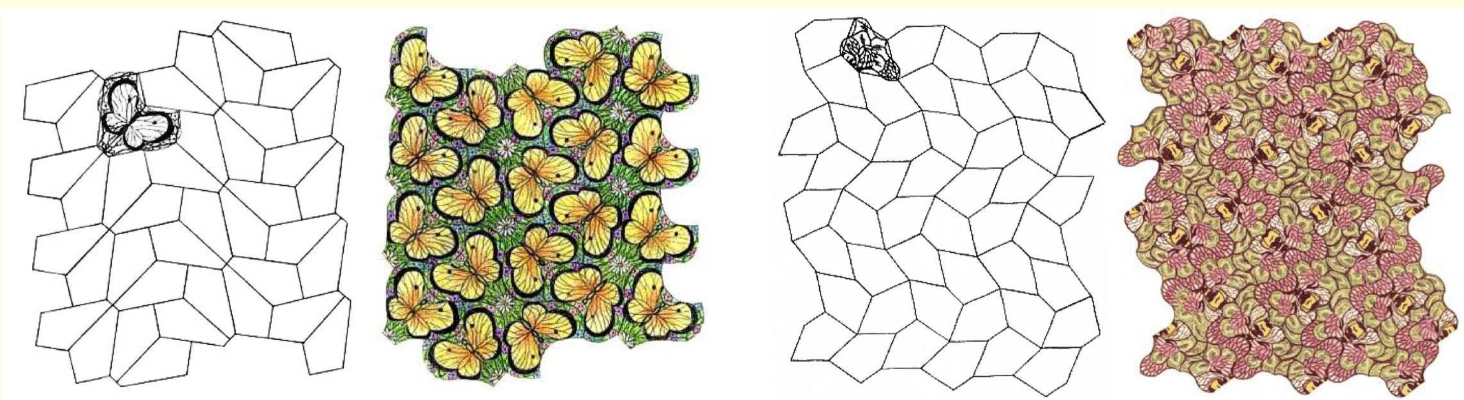
$\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_3 = 1/2$, $2l_3 = l_5$ et $l_3 = l_4$

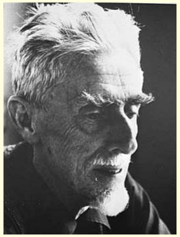




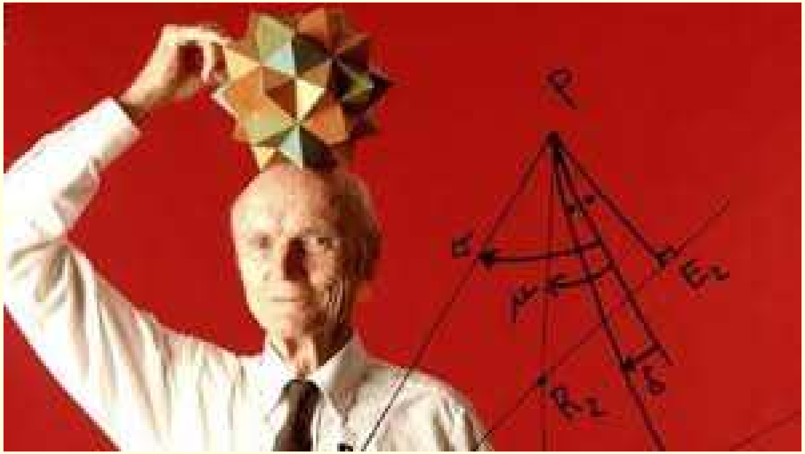


Marjorie Rice 1923-2017 **Doris Schattschneider 1939-** **Mauritz Cornelis Escher 1898-1972**





Mauritz Cornelis Escher
1898-1972

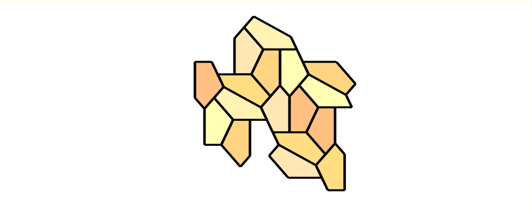


Harold Scott Mac Donald Coxeter
1907-2003

(14)

$$2\,\alpha_2 + \alpha_3 = 2 \text{ et } \alpha_3 + \alpha_5 = 1$$

$$\alpha_1 = 1/2,\ \alpha_3 = 1/2,\ 2l_1 = 2\,l_3 = l_4 = l_5$$



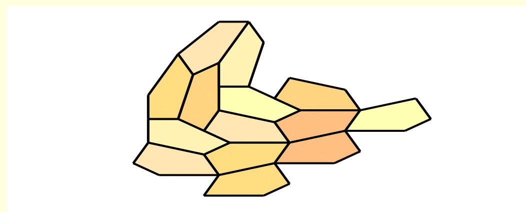
Rolf Stein était étudiant en thèse en 1985.

Après quarante trois ans sans nouveauté, il paraît en 2015 un magnifique article de Mann, McLoud-Mann et Von Derau qui dévoile une quinzième famille de pentagone convexes pouvant paver le plan :

(15)

$$\alpha_1 = 1/3,\ \alpha_2 = 3/4,\ \alpha_3 = 7/12,\ \alpha_4 = 1/2$$

$$\alpha_5 = 5/6,\ \ l_1 = 2\,l_2 = 2\,l_4 = 2l_5$$



Casey Mann, Jennifer McLoud Mann, David von Derau

Deux pavés d'un pavage sont équivalents si il existe une isométrie qui envoie l'un des pavés sur l'autre.

Si tous les pavés d'un pavages sont équivalents alors le pavage est dit transitif.

C'est en classifiant les pavages transitifs que la quinzième famille de pavages fut trouvée.

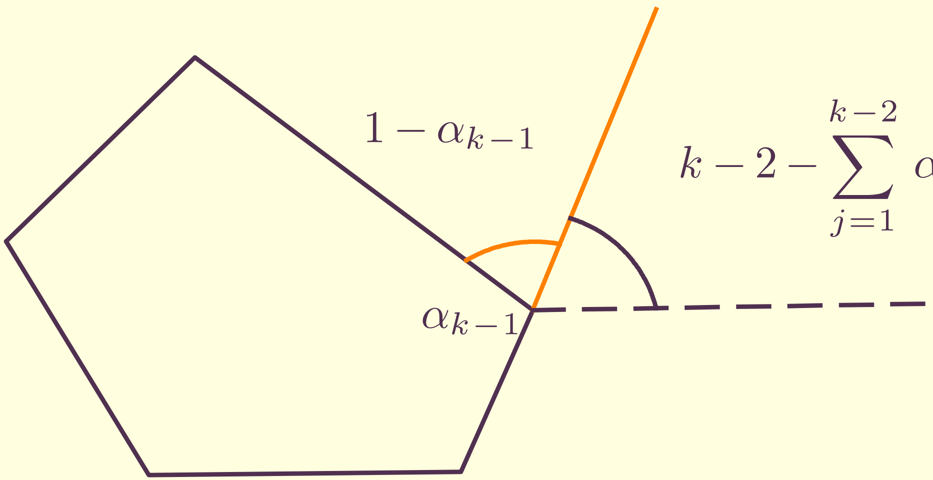
En 2017 Michaël Rao (ENS Lyon) annonce une preuve informatique dans un article :

***Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane*.**

Les seules familles de pentagones convexes pouvant paver le plan sont les quinze familles connues.

Michaël Rao

Le vecteur de variables $\begin{pmatrix} l \\ \alpha \end{pmatrix}$ où l est le vecteur des longueurs des cotés et α le vecteur des angles.



$$\sum_{k=1}^{n} l_k e^{i\pi\left(k-1-\sum_{j=1}^{k-1}\alpha_j\right)} = 0$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} l_k e^{i\pi\left(k-1-\sum_{j=1}^{k-1}\alpha_j\right)} &= 0 \\
\sum_{k=1}^{n} \alpha_k - 3 &= 0 \\
\sum_{k=1}^{n} l_k - 1 &= 0 \\
C\begin{pmatrix} l \\ \alpha \end{pmatrix} - e &= 0
\end{aligned}$$

où $C \in \mathbb{R}^{p\times 2n}$. Par exemple dans le cas de la famille (3) :

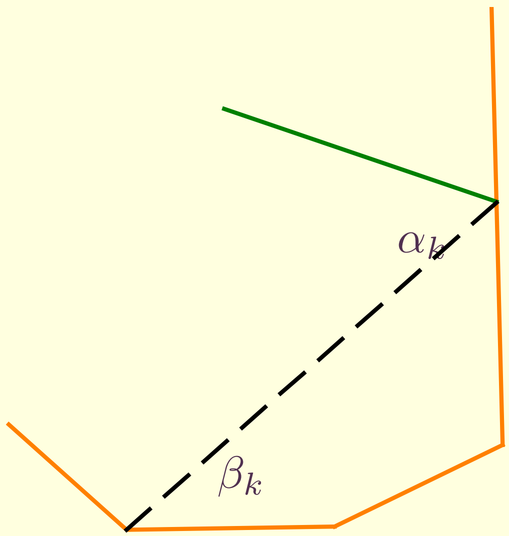
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$e = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \end{pmatrix}$$

Les conditions pour que le polygone soit convexe sont données par :

$$k - 1 - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j - \beta_k \; < \; \alpha_k \; < \; 1$$

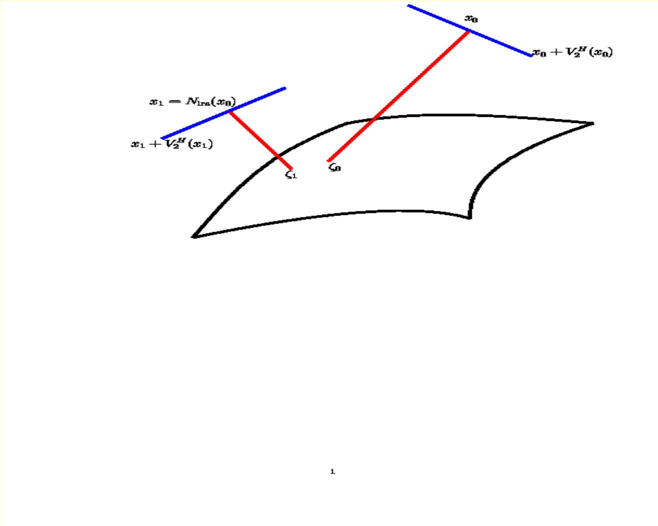


On utilise la méthode de Newton dans le cas surjectif.

$$N_F(x) = x - \mathrm{DF}(x)^T(\mathrm{DF}(x)\,\mathrm{DF}(x\,)^T)^{-1}\,F(x)$$

Ici $x = (l, \alpha) \in \mathcal{R}^{10}$ où $l = (l_1 \ldots l_5)$ et $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_5)$ et $F(x)$ est le système décrit en 25.

Le pentagone calculé n'est pas forcément convexe. On vérifie alors les conditions de convexité décrits en 26.



$$F(x) = 0$$

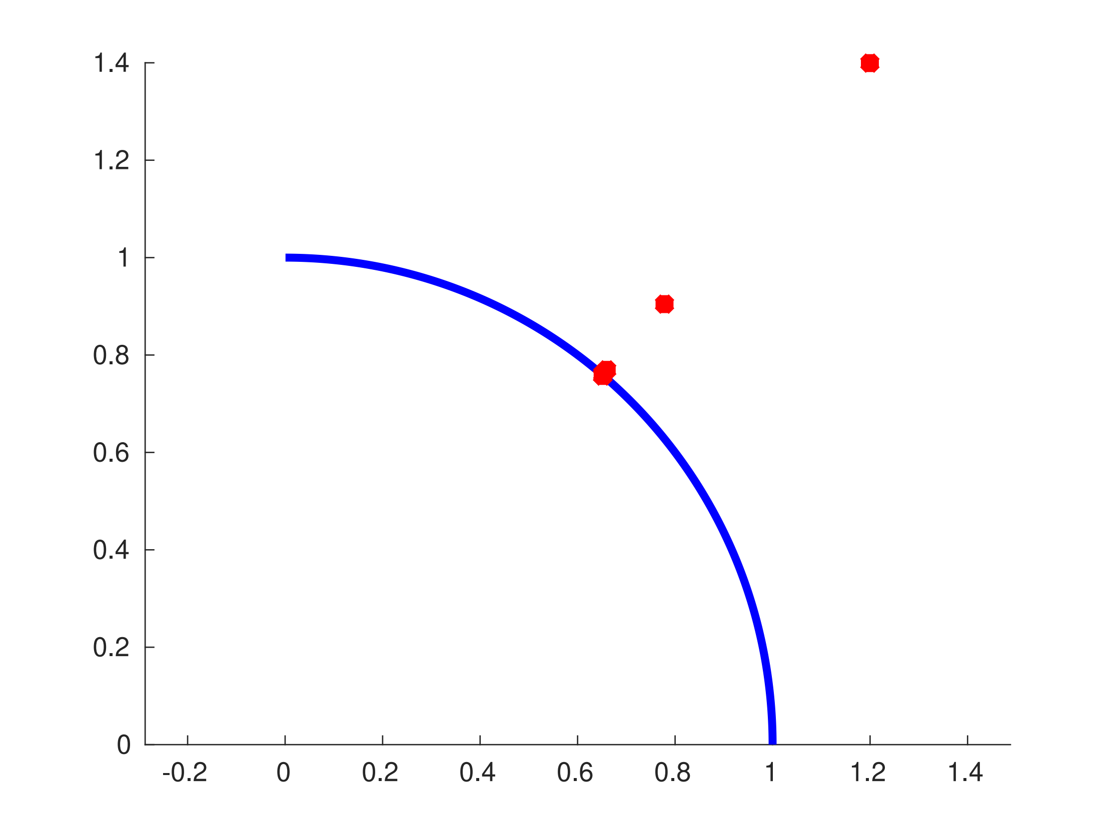
Ce qui conduit à $y = x - DF(x)^T(DF(x)DF(x)^T)^{-1}F(x) := N_F(x)$.

Le calcul numérique consiste à partir de x_0 fixé de déterminer la suite :

$$x_{i+1} = N_F(x_i), \qquad i \geqslant 0$$

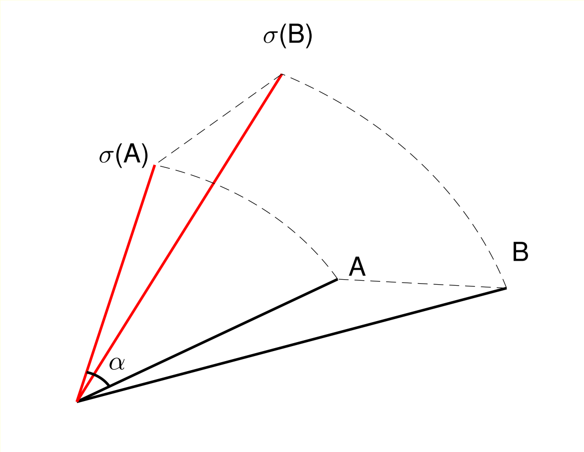
$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$ $\qquad D\,F(x,y) = (2x, 2y).$

$$
\begin{aligned}
N_F(x,y) &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - D\,F(x,y)^T (D\,F(x,y) D\,F(x,y)^T)^{-1} F(x,y) \\
&= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \left((2x, 2y) \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \right)^{-1} (x^2 + y^2 - 1) \\
&= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \left(4x^2 + 4y^2 \right)^{-1} (x^2 + y^2 - 1) \\
&= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2} \\
&= \frac{x^2 + y^2 + 1}{2(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

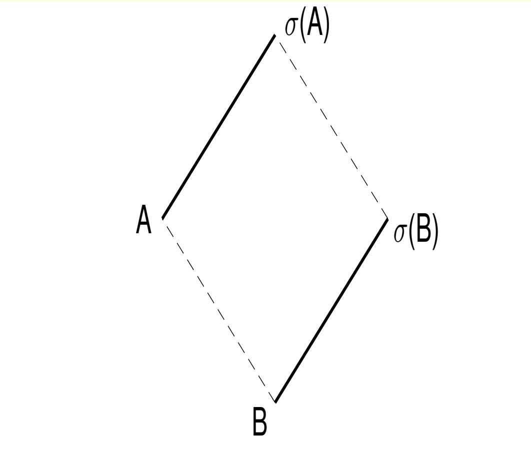


Erreur
0.84
0.19
0.015
0.0012
7e-9
2e-17
3e-34
5e-68
2e-135

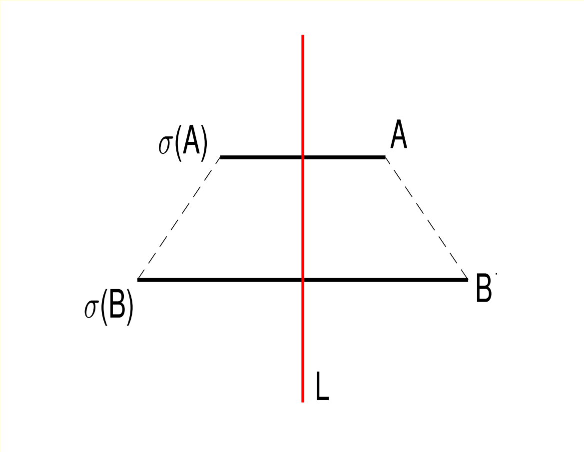
Une isométrie du plan est une transformation qui préserve les distances.



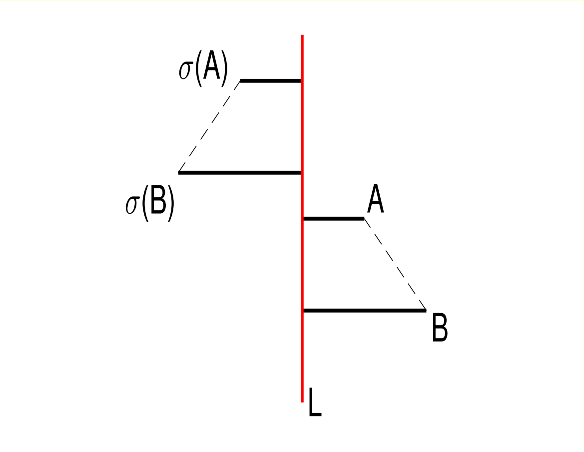
Rotation



Translation



Réflexion



Réflexion Glissée