

Labomath :

Quelques problèmes avec un peu de raisonnement

Issu d'une épreuve de sélection
Stage Animath 2012

Exercice 3. Monsieur et Madame Mathon se partagent un plateau de sept fromages. Ils désirent en prendre chacun trois en entier, et partager le septième de sorte que chacun reçoive le même poids total de fromage. Est-il possible, quels que soient les poids des sept fromages, de choisir les trois fromages de l'un, les trois fromages de l'autre et comment découper le septième fromage de sorte que leur désir soit satisfait ?

Exercice 4. Soient b et d des nombres réels non nuls tels que $b + d$ soit lui aussi non nul. Mathias affirme que l'identité $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ est vraie pour tous les nombres réels a et c : elle s'appelle "additivité des fractions". Mathilde pense que cette additivité des fractions est correcte si et seulement s'il existe un nombre réel m tel que $a = mb^2$ et $c = -md^2$. Leur professeur rappelle que l'on peut additionner des fractions comme Mathias le propose si et seulement si elles ont le même dénominateur, c'est-à-dire $b = d$. Un inspecteur affirme que cette "additivité des fractions" est toujours fausse. Qui a raison : Mathias, Mathilde, le professeur, l'inspecteur, ou aucun des quatre ? Justifiez soigneusement votre réponse.

Exercice 5. En région parisienne, les numéros de téléphone fixe se composent des chiffres 01 suivis de huit autres chiffres (par exemple 01.99.98.10.00 ou 01.00.00.35.77 etc.). Pour limiter les appels par erreur, on a décidé que si l'on compose un numéro de téléphone en ne se trompant que d'un seul chiffre, on tombe toujours sur un numéro non attribué : par exemple si 01.99.98.10.00 est attribué, alors 01.89.98.10.00 et 01.99.98.10.30 sont non attribués. Combien de numéros de téléphone différents peut-on attribuer au maximum en région parisienne ? Justifiez soigneusement votre réponse.