Classe de premières générales et technologiques

OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES

Académie de Montpellier

Session 2009

Durée : 4 heures

Série S

Ce sujet comporte 4 exercices indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.
La clarté de la rédaction, la qualité des raisonnements et les prises d'initiative seront prises en compte.

Exercice 1

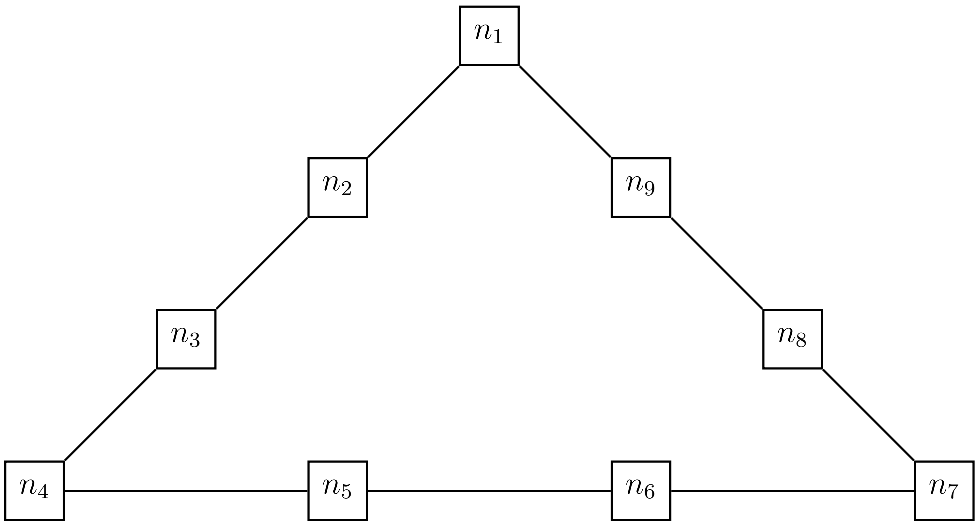
Partie A
Questions préliminaires

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

1. Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
2. Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B
Les triangles magiques

On place tous les nombres entiers de 1 à 9 dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

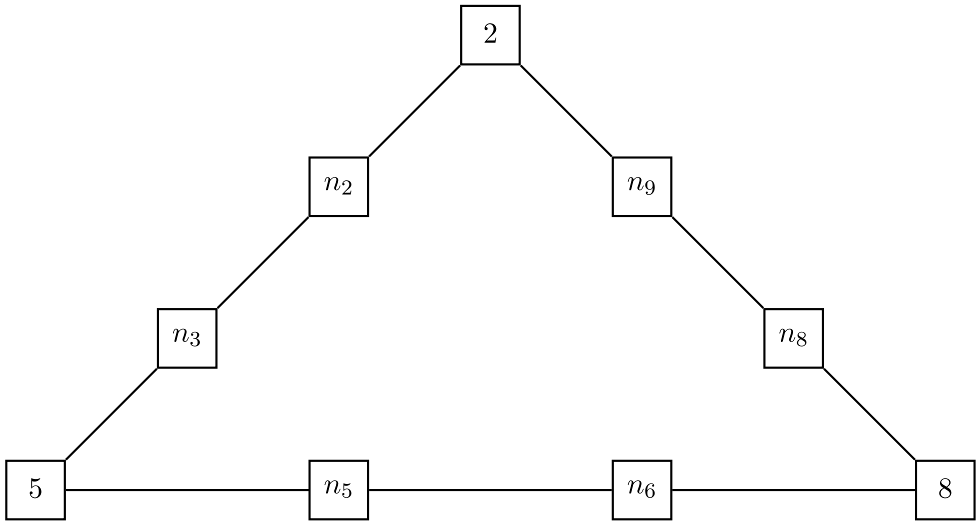


Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur S, on dit que le triangle est S-magique.

(C'est à dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1. Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme $S = 20$.



2. On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.
   a. Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.
   b. En déduire qu'on a $17 \leqslant S \leqslant 23$.
   c. Donner la liste des couples (S, T) ainsi envisageables.
3. Proposer un triangle 17-magique.
4. Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.
5. a. Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
   b. Proposer un triangle 19-magique.
6. Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$-magique.
7. Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

EXERCICE 2

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.

On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

1. Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.
   On pourra noter c la longueur du côté du losange.

Les questions suivantes sont indépendantes.

2. Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du coté du losange.

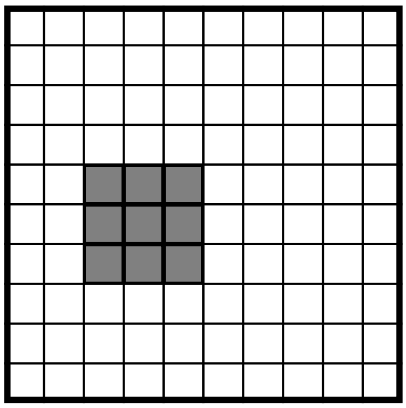
3. On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.
   Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?

4. A partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ. Exprimer, en fonction de L, la largeur l de la feuille de départ.

5. Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

Exercice 3
Le Cardiff de Khâré

Il y a fort longtemps, dans une province lointaine nommée Khâré, se trouvait le palais du Grand « Cardiff ». Dans ce palais on pouvait admirer une salle d'apparat de forme carrée, pavée avec a^2 carreaux carrés de taille identique. Parmi ceux-ci il y a b^2 carreaux carrés colorés dessinant un motif carré, le reste du pavage étant formé de carreaux carrés blancs.



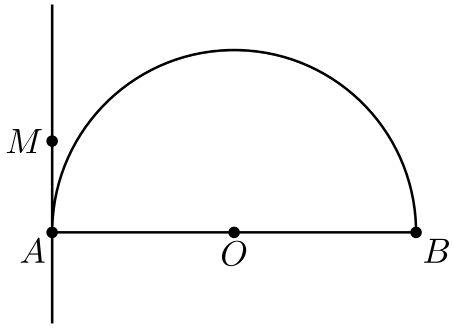
Exemple de situation avec motif de 3^2 carreaux dans une salle de 10^2 carreaux

Le grand mathématicien Factos se présente au palais pour servir le Cardiff qui interpelle Factos ainsi :
« Dans ma salle d'apparat, il y a deux mille neuf carreaux blancs, donne-moi le nombre total de carreaux de la salle alors tu seras à mon service.
– Mais, vénérable Cardiff, il y a trois solutions !
– C'est pour ce que tu viens de répondre que tu es engagé », répondit le Cardiff.

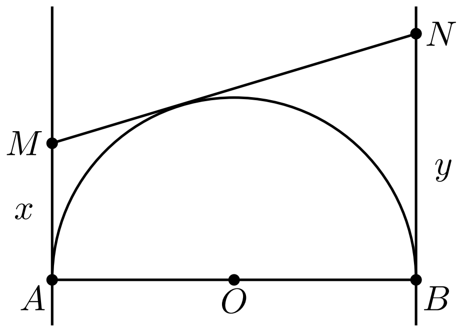
1. Vérifier que 1005^2 carreaux est une solution possible.
2. Déterminer les deux autres solutions de Factos au problème du Cardiff de Khâré.

EXERCICE 4

1. Dans la figure représentée ci-dessous, le segment $[AB]$ est un diamètre du cercle de centre 0 et les droites (AM) et (AB) sont perpendiculaires. Reproduire la figure ci-dessous et construire à la règle et au compas la droite passant par M, différente de (AM) et tangente au demi-cercle de diamètre $[AB]$.



2. On reprend la même figure avec, de plus, les droites (BN) et (MN). Les droites (BN) et (AB) sont perpendiculaires et la droite (MN) est tangente au cercle de diamètre [AB]. On pose : $AM = x$ et $NB = y$



Montrer que :

a. $x + y = MN$

b. $x.y = OA^2$

3. L'unité de mesure est définie par la longueur du segment $[OI]$. M est un point de la demi-droite $[OI)$ et le segment $[OM]$ mesure x.
Construire à la règle et au compas un rectangle d'aire 1 et dont un coté mesure x.