Problème 3: Un billard

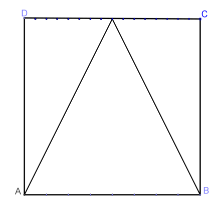
JeanDuSud, Castelnaudary

Résumé:

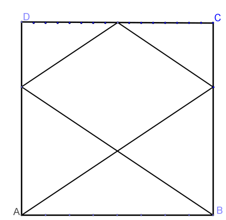
Nous avons étudié le cas du carré (question 1.) et classifié les trajectoires selon le nombres rebonds sur les bords latéraux. Dans le cas où la bille blanche est dans le coin inférieur gauche et la bille rouge dans le coin inférieur droit, nous avons prouvé que sans rebonds latéraux, il existe un nombre fini de positions pour les billes noires afin d'empêcher toutes les trajectoires à l'aide d'équations de droites et de quelques notions d'arithmétiques. Nous avons ensuite généralisé cette démonstration dans le cas où la bille blanche et la bille rouge ont des positions quelconques dans le carré.

Notations

Nommons le carré ABCD et nous travaillons dans le repère $(O;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.
Sauf mention contraire, m,n,et k désignerons toujours des entiers naturels positifs
−On dira qu'une trajectoire de la bille blanche est du type RISn (Rebonds sur le bord Inférieur [AB] ou le bord supérieur[CD]) lorsque la bille ne rebondit que sur [AB] ou [CD] et effectue en tout $n-1$ rebonds, dans ce cas la trajectoire est constituée de n segments de droites.
Exemple: une trajectoire de type RIS2



−On dira qu'une trajectoire de la bille blanche est du type LAT−Dn (Rebonds sur le bord latéral droit [BC]) lorsque la bille rebondit n un fois sur ce bord.
−On dira qu'une trajectoire de la bille blanche est du type LAT−Gn (Rebonds sur le bord latéral gauche [AD]) lorsque la bille rebondit n un fois sur ce bord.
−On dira qu'une trajectoire de la bille blanche est du type LAT−Dm−Gn si elle est du type LAT−Dm et LAT−Gn
Exemple: une trajectoire de type LAT−D1−G1

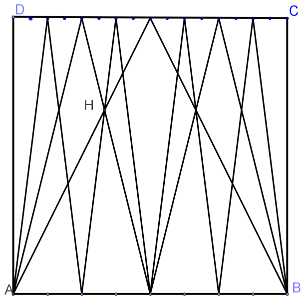


Question 1: Le cas du carré

1er cas: La bille blanche est en A et la bille rouge est en B

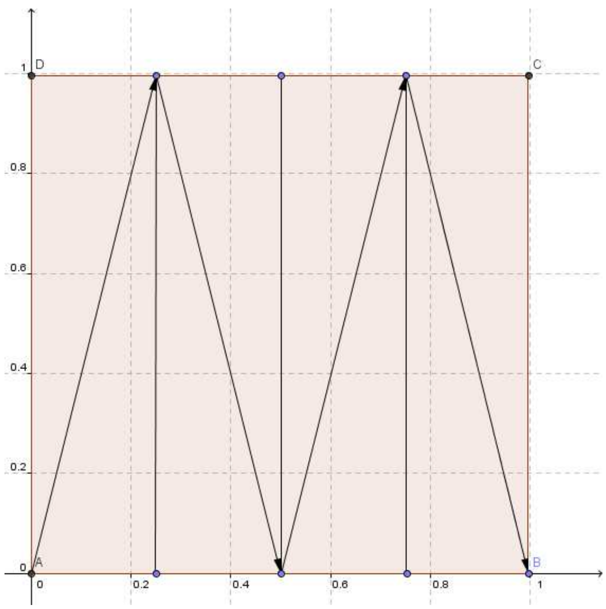
On a A(0;0) et B(1;0). Si nous regardons les trajectoires de type RISn.
l'entier n ne peut être qu'un nombre pair car:
−Pour une trajectoire RIS2 c'est évident.
− Si pour un certain $k \geqslant 2$ cela est vrai alors cela est encore vrai pour $k+1$ puisqu'il faut ajouter une trajectoire de type RIS2
On en déduit par récurrence que c'est toujours vrai.

Etudions donc le cas RISn où n est pair
Par exemple dans le cas RISn ou n est une puissance de deux: ici n=2;4;8, on conjecture l'existence d'un point H commun à toutes les trajectoires

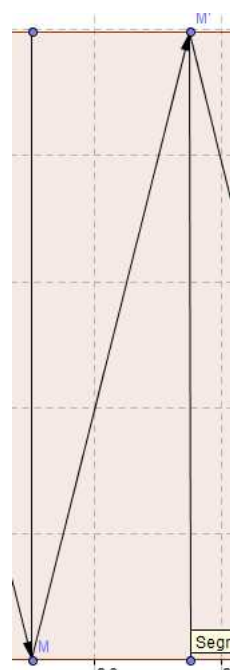


D’une manière générale pour une trajectoire de type RIS−2n où n $\geqslant$ 1, démontrons qu’il existe un nombre fini de point H commun à toutes les trajectoires:

Pour ce, nous déterminerons les différents points H ayant pour abscisse $\frac{1}{3}$ se trouvant sur les trajectoires possibles de la balle blanche



RIS−4



On peut donc diviser le carré en plusieurs parties :
En n rectangles de dimensions $1 * \frac{1}{n}$ pour lesquels chaque rectangle comprend une trajectoire aller−retour. (par exemple pour un RIS−4 on va avoir 2 rectangles)
Et chacun de ces rectangles va se diviser en 2 autres rectangles (appelés ici “ demi−rectangles ”) : l’un pour la montée et l’autre pour la descente. Leurs dimensions sont $1 * \frac{1}{2n}$. On appellera k le k$^{\text{ème}}$ demi−rectangle.(Pour l’exemple ci−dessus on aura par exemple k=0 pour le premier rectangle) Ainsi k désigne le k$^{\text{ème}}$ rectangle.

A−Mise en équation

On va donc dans un premier temps mettre en équation les trajectoires en les associant à diverses fonctions.

On va poser $f_n^k(x)$ la fonction qui décrit la partie d'une trajectoire de type RIS−2n se passant dans le k^{ème} demi−rectangle.
Déterminons $f_n^k(x)$ selon 2 cas possibles.

- Si k est impair

Dans ce cas nous sommes dans une situation où la trajectoire “ monte ”.
Nommons M et M' les points situés aux coins opposés du demi−rectangle par lesquels passe la trajectoire.
Alors l'ordonnée de M est 0 et celle de M' est 1.
Par ailleurs il y a 2n demi−rectangles, la différence des abscisses de ces deux points est donc de $\frac{1}{2n}$.
Enfin l'on sait que l'abscisse de M' est $\frac{k}{2n}$.
Ainsi les coordonnées de ces points sont :
$M(\frac{k-1}{2n};0)$ et $M(\frac{k}{2n};1)$
La trajectoire étant une droite, on sait que f_n^k est affine et que par conséquent elle est de la forme :
$f_n^k(x) = ax + b \;\; avec\; a, b\; réels$
On a donc le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} 0 = a\dfrac{k-1}{2n} + b \\ 1 = a\dfrac{k}{2n} + b \end{cases}$$

Que l'on résout :

$$b = -a\frac{k-1}{2n}$$

$$\Rightarrow 1 = a\frac{k}{2n} - a\frac{k-1}{2n} = a\frac{1}{2n}$$

$$\Leftrightarrow a = 2n$$

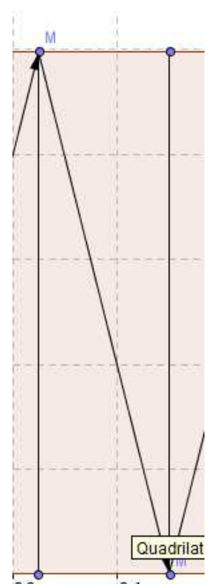
$$\Rightarrow b = -\frac{2n(k-1)}{2n} = -(k-1)$$

Ainsi l'on obtient :

$$\begin{cases} a = 2n \\ b = -(k-1) \end{cases}$$

On a donc pour k impair :

$$f_n^k(x) = 2n * x - (k-1)$$



- Si k est pair

Dans ce cas nous sommes dans une situation où la trajectoire “ descend ”.
On nomme toujours M et M' les points situés aux coins opposés du demi−rectangle par lesquels passe la trajectoire.
De la même façon que précédemment l'on obtient les coordonnées de ces points:

$M(\frac{k-1}{2n};1)$ et $M(\frac{k}{2n};0)$

On a toujours $f_n^k(x) = ax + b \;\; avec\ a, b\ réels$

Et on a donc le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} 1 = a\dfrac{k-1}{2n} + b \\ 0 = a\dfrac{k}{2n} + b \end{cases}$$

Que l'on résout :

$$b = -\,a\frac{k}{2n}$$

$$\Rightarrow 1 = a\frac{k-1}{2n} - \;a\frac{k}{2n} = a\frac{-1}{2n}$$

$$\Leftrightarrow a = -2n$$

$$\Rightarrow \; b = -\;\frac{-2n * k}{2n} = k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \quad a = 2n \\ b = -(k-1) \end{cases}$$

On a donc pour k pair :

$$f_n^k(x) = -2n * x + k$$

<u>B–Encadrement de k</u>

Nous allons à présent déterminer un encadrement de k pour lequel les points d'abscisses $\frac{1}{3}$ font partie du k$^{\text{ème}}$ demi–rectangle.

Autrement dit l'on cherche k tel que :

$$\frac{k-1}{2n} \leq \frac{1}{3} \leq \frac{k}{2n}$$

Ainsi :

$$k - 1 \leq \frac{2n}{3} \leq k$$

$$\Leftrightarrow 3k - 3 \leq 2n \leq 3k$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq 2n - 3k \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2n - 3 \leq -3k \leq -2n$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n}{3} \leq k \leq \frac{2n}{3} + 1$$

<u>C–Détermination de H</u>

Finalement nous allons déterminer les ordonnées des différents points H d'abscisse $\frac{1}{3}$

Pour ce déterminons$f_n^k\left(\frac{1}{3}\right)$.

Posons A=$3 * f_n^k\left(\frac{1}{3}\right)$

- Si k est impair

Alors :

$A = 3 * f_n^k\left(\frac{1}{3}\right) = 3 * \left(\left(\frac{2n}{3}\right) - (k-1)\right) = 2n - 3k + 3$

Or :

$-2n - 3 \leq -3k \leq -2n$

$\Longrightarrow 2n - 2n - 3 + 3 \leq 2n - 3k + 3 \leq 2n - 2n + 3$

$\Longrightarrow 0 \leq A \leq 3$

Mais comme n et k sont entiers alors 2n−3k+3 est entier également, donc A est entier.
Ainsi A vaut 0 ; 1 ; 2 ou 3.
Et $f_n^k\left(\frac{1}{3}\right)$ vaut $0\,;\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}$ ou 3

- Si k est pair

Alors :

$A = 3 * f_n^k\left(\frac{1}{3}\right) = 3 * \left(-\left(\frac{2n}{3}\right) + k\right) = -2n + 3k$

Or :

$\frac{2n}{3} \leq k \leq \frac{2n}{3} + 1$

$\Longrightarrow 2n \leq 3k \leq 2n + 3$

$\Longrightarrow -2n + 2n \leq -2n + 3k \leq -2n + 2n + 3$

$\Longrightarrow 0 \leq A \leq 3$

Mais comme n et k sont entiers alors −2n+3k est entier également, donc A est entier.
Ainsi A vaut 0 ; 1 ; 2 ou 3.
Et $f_n^k\left(\frac{1}{3}\right)$ vaut $0\,;\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}$ ou 3

D−Conclusion

Ainsi quel que soit $n \geq 1$ on a la trajectoire de type RIS−2n qui passe par l'un des points suivants :

$H_1\left(\frac{1}{3};0\right)$; $H_2\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$; $H_3\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$; $H_4\left(\frac{1}{3};1\right)$

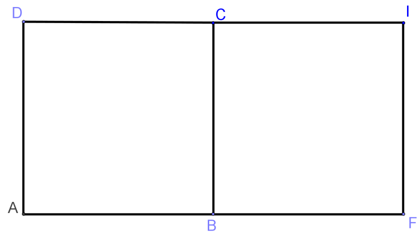
Pour ce type de trajectoire un nombre fini de billes noires (4) peut donc suffire pour empêcher la bille blanche d'atteindre la bille rouge.

2ème cas: La bille blanche est en A et la bille rouge est sur [BC]

La bille rouge se trouve en E(1,q) où q ∈]0;1]

- Si q=1, considérons une trajectoire de type RIS−n , une symétrie par rapport à (CB) donne une trajectoire de type RIS2n dans le rectangle AFID pour atteindre F où F(2,0).

  Comme précédemment en prenant pour abscisse $\frac{1}{3}$ de la longueur soit $x=\frac{2}{3}$, une seule bille coupera toutes les trajectoires.



- Si q<1, On détermine les expressions des équations de droites des trajectoires:

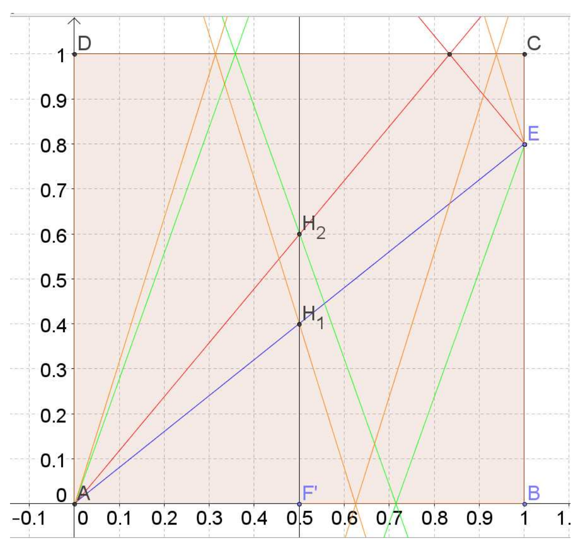
Si q<1, On détermine les expressions des
équations de droites des trajectoires ”

Nous nous plaçons dans le cas où la bille blanche est en A et où la bille rouge est le point E(1,q) où $q \in]0;1]$ appartenant à [BC].
On peut également considérer q=0 mais cela nous ramènerait au cas précédent.

Nous allons donc comme pour l'étude de cas précédente établir les équations des trajectoires et ensuite montrer qu'existent certains points bloquant toute trajectoire.
On conjecture ces deux points :
$H_1\left(\frac{1}{2};\frac{q}{2}\right)$; $H_2\left(\frac{1}{2};1-\frac{q}{2}\right)$

A–Mise en équation
On nomme n le nombre de segments qui constituent la ligne brisée qu'est la trajectoire.
On nomme k le $k^{\text{ème}}$ de ces n segments.
Ci–contre sont visibles les 4 premières trajectoires possibles pour un point E donné :

- En bleu n=1
- En rouge n=2
- En vert n=3
- En orange n=4

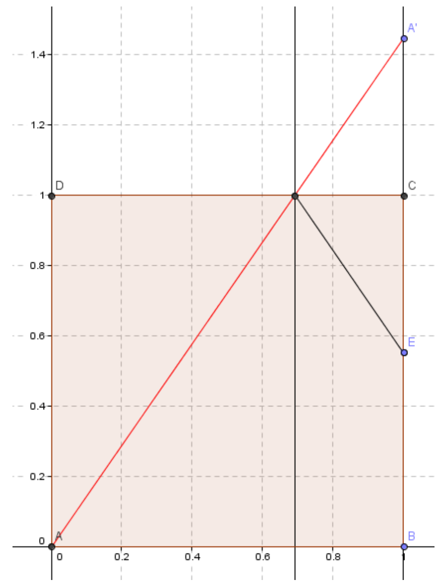


Séparons les cas :

- o <u>Si n est pair</u>

Dans ce cas le dernier des n segments va arriver “ par le haut ”.
La longueur totale de la trajectoire sera donc égale à celle du segment reliant le point $A(0;0)$ au point A' d'abscisse 1 et d'ordonnée $y_{A'}$.
Pour déterminer $y_{A'}$ on utilisera le fait que les réflexions sont spéculaires.

Le cas simple avec n=2 nous éclaire et sur ces réflexions et ainsi pour obtenir $y_{A'}$ il suffit d'additionner les différentes ordonnées des n segments.



On a donc n−1 segments " normaux " qui traversent la totalité du carré et qui ont donc pour " ordonnée " 1 et le dernier segment qui part du point d'ordonnée 1 pour arriver au point E d'ordonnée q.
Ainsi :
$y_{A'} = (n-1) * 1 + 1 * (1-q)$
$\Leftrightarrow y_{A'} = n - q$
Le coefficient directeur de (AA') est ainsi $n - q$.
Ainsi chaque demi−rectangle " normal " va avoir pour largeur $\frac{1}{n-q}$ est le n$^{\text{ème}}$ demi−rectangle va avoir pour largeur $\frac{1-q}{n-q}$.

Maintenant trouvons les équations des droites proprement dites que nous appellerons comme précédemment $f_n^k(x)$

- Si k est impair

Dans ce cas nous sommes dans une situation où la trajectoire " monte ".
Nommons M et M' les points situés aux coins opposés du demi−rectangle par lesquels passe la trajectoire.
Ainsi les coordonnées de ces points sont :
$M\left(\frac{k-1}{n-q};0\right)$ et $M\left(\frac{k}{n-q};1\right)$
La trajectoire étant une droite, on sait que f_n^k est affine.
On a donc le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} 0 = a\dfrac{k-1}{n-q} + b \\ 1 = a\dfrac{k}{n-q} + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2n \\ b = -(k-1) \end{cases}$$

On a donc pour k impair :
$f_n^k(x) = (n-q) * x - (k-1)$

- Si k est pair

Dans ce cas nous sommes dans une situation où la trajectoire " descend ".
De façon similaire on pose M et M' les points situés aux coins opposés du demi−rectangle par lesquels passe la trajectoire tels que :
$M\left(\frac{k-1}{n-q};1\right)$ et $M\left(\frac{k}{n-q};0\right)$
La trajectoire étant une droite, on sait que f_n^k est affine et par résolution d'un système d'équation analogue on obtient la forme suivante :
On a pour k pair :

$f_n^k(x) = (q-n) * x + k$

- Si n est impair

Dans ce cas le dernier des n segments va arriver “ par le bas ”.
On cherche toujours un point $A'(1\,; y_{A'})$ qauf qu'à présent on a $n-1$ segments “ normaux ” qui traversent la totalité du carré et qui ont donc pour “ ordonnée ” 1 et le dernier segment qui part du point d'ordonnée 0 pour arriver au point E d'ordonnée q.
Ainsi :
$y_{A'} = (n-1) * 1 + 1 * (0+q)$
$\Leftrightarrow y_{A'} = n + q - 1$
Le coefficient directeur de (AA') est ainsi $n-q$.
Ainsi chaque demi–rectangle “ normal ” va avoir pour largeur $\frac{1}{n+q-1}$ est le n$^{\text{ème}}$ demi–rectangle va avoir pour largeur $\frac{1-q}{n+q-1}$.
Maintenant trouvons les équations des droites de la même façon que pour le cas où n était pair.
Nous passerons sur les étapes intermédiaires pour arriver directement aux résultats.
Ainsi on a :

- Si k est impair

$f_n^k(x) = (n+q-1) * x - (k-1)$

- Si k est pair

$f_n^k(x) = (1-n-q) * x + k$

<u>B–Détermination de H_1 et H_2</u>

A présent nous allons montrer que toutes les trajectoires de ce type passent par l'un des points suivant :
$H_1\left(\frac{1}{2}; \frac{q}{2}\right)$; $H_2\left(\frac{1}{2}; 1-\frac{q}{2}\right)$

Pour ce nous allons étudier les différents cas selon la parité de n et celle de k.
On sélectionnera le k pour lequel le point d'abscisse $\frac{1}{2}$ aura bien une image par f_n^k .
f_n^k n'étant définie que de façon à ce que c'est images soient comprises entre 0 et 1 on a :
$0 \leq f_n^k(x) \leq 1$

- Si n pair

On pose donc $n = 2k'$ avec $k' \in \mathbb{N}$
Ce qui équivaut à : $k' = \frac{n}{2}$

  - Si k impair

Alors :
$f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = (n-q) * \frac{1}{2} - (k-1)$
Or k est entier donc $-k+1$ l'est également.
Ainsi la valeur de $f_n^k\left(\frac{1}{2}\right)$ qui est comprise entre 0 et 1 dépend des décimales de $\frac{n-q}{2}$.
Ainsi :

$$f_n^k\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{n-q}{2}-E\left(\frac{n-q}{2}\right)$$
$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{n-q}{2}-E\left(\frac{2k'-q}{2}\right)$$
$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{n-q}{2}-E\left(k'-\frac{q}{2}\right)$$
$$Or : 0<\frac{q}{2}<1$$
$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{n-q}{2}-(k'-1)$$
$$=\frac{n-q}{2}-\frac{n}{2}+1$$
$$=1-\frac{q}{2}$$
Et on a donc le point H_2 qui appartient à la trajectoire.

- Si k pair

Alors :
$$f_n^k\left(\frac{1}{2}\right)=(q-n)*\frac{1}{2}+k$$
Or k est entier.
Ainsi la valeur de $f_n^k\left(\frac{1}{2}\right)$ qui est comprise entre 0 et 1 dépend des décimales de $\frac{q-n}{2}$.
Ainsi :
$$f_n^k\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{q-n}{2}-E\left(\frac{q-n}{2}\right)$$
$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{q-n}{2}-E\left(\frac{q-2k'}{2}\right)$$
$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{q-n}{2}-E\left(\frac{q}{2}-k'\right)$$
$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{q-n}{2}-(-k')$$
$$=\frac{q-n}{2}+\frac{n}{2}$$
$$=\frac{q}{2}$$
Et on a donc le point H_1 qui appartient à la trajectoire.

- <u>Si n impair</u>

On pose donc $n=2k'+1$ avec $k'\in\mathbb{N}$
Ce qui équivaut à : $k'=\frac{n-1}{2}$
On raisonnera ici de manière similaire.

- Si k impair

Alors :

$$f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n+q-1}{2} - k + 1$$

Ainsi de façon similaire on a :

$$f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n+q-1}{2} - E\left(\frac{n+q-1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n+q-1}{2} - E\left(\frac{2k'+1+q-1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n+q-1}{2} - E\left(\frac{2k'+q}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n+q-1}{2} - E(k'+q)$$

$$= \frac{n+q-1}{2} - k'$$

$$= \frac{n+q-1}{2} - \frac{n-1}{2}$$

$$= \frac{q}{2}$$

Et on a donc le point H_1 qui appartient à la trajectoire.

- Si k pair

Alors toujours de la même manière.

$$f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-n-q}{2} - E\left(\frac{1-n-q}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-n-q}{2} - E\left(-k' - \frac{q}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-n-q}{2} - k' - 1$$

$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-n-q}{2} - \frac{n-1}{2} - 1$$

$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{q}{2}$$

Et on a donc le point H_2 qui appartient à la trajectoire.

D – Conclusion

Ainsi toutes les trajectoires de ce type reliant le point $A(0;0)$ au point $E(1;q)$ passent par l'un des points suivant.

$$H_1\left(\frac{1}{2};\frac{q}{2}\right)\ ;\ H_2\left(\frac{1}{2};1-\frac{q}{2}\right)$$

Un nombre fini de boules noires (2) suffit donc à bloquer toutes ces trajectoires.

Remarque: ce résultat pour le deuxième cas englobe les résultats du premier cas dont on aurait pu finalement se passer mais nous avons choisi de le garder car il témoigne de notre démarche de recherche.

3ème cas: La bille blanche est en F sur [AD] et la bille rouge en G sur [BC]

On a F(0,p) où p ∈ [0;1] et G(1,q) où q ∈ [0;1]

- Le cas (p;q)=(0,0) et (p;q)=(0,1) ont déjà été traités.
- Les cas (p;q)=(1,0) et (p;q)=(1,1) se ramènent aux cas précédents.

On peut donc supposer pour la suite que p et q sont dans]0;1[

Nous allons montrer que pour tout F et G il existe 4 points bloquant toutes les trajectoires possibles.

Ces points sont :

$H_1\left(\frac{1}{2};\frac{p+q}{2}\right)$; $H_2\left(\frac{1}{2};1-\frac{p+q}{2}\right)$; $H_3\left(\frac{1}{2};\frac{q-p}{2}\right)$; $H_4\left(\frac{1}{2};1-\frac{q-p}{2}\right)$ si q > p

$H_1\left(\frac{1}{2};\frac{p+q}{2}\right)$; $H_2\left(\frac{1}{2};1-\frac{p+q}{2}\right)$; $H_5\left(\frac{1}{2};\frac{p-q}{2}\right)$; $H_6\left(\frac{1}{2};1-\frac{p-q}{2}\right)$ si q < p

$H_1\left(\frac{1}{2};\frac{p+q}{2}\right)$; $H_2\left(\frac{1}{2};1-\frac{p+q}{2}\right)$; $H_7\left(\frac{1}{2};0\right)$; $H_8\left(\frac{1}{2};1\right)$ si q = p

Pour ce nous allons séparer deux types de trajectoires :

- Celles dont la première direction est vers le haut
- Celles dont la première direction est vers le bas

On conservera les notations utilisées précédemment.

A – Les trajectoires vers le haut

Ici nous utiliserons les mêmes méthodes que précédemment, à savoir mise en équation puis détermination de l'ordonnée du point d'abscisse $\frac{1}{2}$ en fonction des paramètres.

Ainsi nous donnerons ici presque directement les résultats.

- Si n est pair

On pose $n = 2k'$ avec $k' \in \mathbb{N}$

Alors on a le coefficient directeur noté a de la droite allant de F à A' :

$a = 1 * (1-p) + (n-2) * 1 + 1 * (1-q) = n - p - q$

  - Si k est impair

Ainsi dans ce cas on obtient de façon analogue à ce qui se faisait avant :

$f_n^k(x) = (n-p-q) * x - k + 1$

Et on a donc :

$$f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n-p-q}{2} - E\left(\frac{n-p-q}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n-p-q}{2} - E\left(k' - \frac{p+q}{2}\right)$$

$$Or : 0 < \frac{p+q}{2} < 1$$

$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n-p-q}{2} - k' + 1$$

$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{p+q}{2}$$

On a donc le point H_2 qui appartient à la trajectoire.

- Si k est pair

L'équation des droites est :
$f_n^k(x) = (p+q-n) * x + k$
Ainsi :
$f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{p+q-n}{2} - E\left(\frac{p+q-n}{2}\right)$
$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{p+q-n}{2} - E\left(\frac{p+q}{2} - k'\right)$
$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{p+q-n}{2} + k'$
$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{p+q}{2}$
On a donc le point H_1 qui appartient à la trajectoire.

- <u>Si n est impair</u>

On pose $n = 2k' + 1$ avec $k' \in \mathbb{N}$
Alors on a le coefficient directeur noté a de la droite allant de F à A' :
$a = 1 * (1-p) + (n-2) * 1 + 1 * q = n + q - p - 1$

- Si k est impair

L'équation des droites est :
$f_n^k(x) = (n+q-p-1) * x - k + 1$
Et on a donc :
$f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n+q-p-1}{2} - E\left(\frac{n+q-p-1}{2}\right)$
$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n+q-p-1}{2} - E\left(k' + \frac{q-p}{2}\right)$
On est donc confronté à 3 cas :
Soit $q > p$ et :
$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n+q-p-1}{2} - k'$
$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{q-p}{2}$
Ainsi le point H_3 appartient à la trajectoire.
Soit $q = p$ et :
$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n+q-p-1}{2} - k'$
$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
Ainsi le point H_7 appartient à la trajectoire.

Soit $q < p$ et :

$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n+q-p-1}{2} - k' + 1$$

$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{p-q}{2}$$

Ainsi le point H_6 appartient à la trajectoire.

- Si k est pair

L'équation des droites est :

$$f_n^k(x) = (p+1-q-n) * x + k$$

Et on a donc :

$$f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{p+1-q-n}{2} - E\left(\frac{p+1-q-n}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{p+1-q-n}{2} - E\left(\frac{p-q}{2} - k'\right)$$

On est donc confronté à 3 cas :

Soit $q > p$ et :

$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{p+1-q-n}{2} + k' + 1$$

$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{q-p}{2}$$

Ainsi le point H_4 appartient à la trajectoire.

Soit $q = p$ et :

$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{p+1-q-n}{2} + k'$$

$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Ainsi le point H_7 appartient à la trajectoire.

Soit $q < p$ et :

$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{p+1-q-n}{2} + k' + 1$$

$$\Rightarrow f_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{p-q}{2}$$

Ainsi le point H_5 appartient à la trajectoire.

B – Les trajectoires vers le bas

Pour les déterminer nous allons utiliser les résultats précédents.

Pour ce considérons le symétrique d'une trajectoire par rapport à la droite d'équation $y = 0.5x$

On a donc pour tout point $M(x_M; y_M)$ de la trajectoire le point $M'(x_M; 1 - y_M)$.

Or cette trajectoire symétrique commence par monter. On est donc dans le cadre de ce qui a été vu dans la partie précédente.

Posons $F'(0\,;1-p)$ et $G'(1\,;1-q)$ alors on va être en mesure de déterminer les points H. En effet s'il l'on a $H\left(\frac{1}{2};y_H\right)$ alors on aura $H'\left(\frac{1}{2};1-y_H\right)$
Ainsi :
$H_1\left(\frac{1}{2};\frac{p+q}{2}\right)$ implique $H_2\left(\frac{1}{2};1-\frac{p+q}{2}\right)$ et réciproquement et ce quel que soient p et q.
Mais quand est-il des autres points ?
Si $p=q$:
$H_7\left(\frac{1}{2};0\right)$ implique $H_8\left(\frac{1}{2};1\right)$

Si $q>p$ alors $1-q<1-p$ et de la même façon on trouve les différents points symétriques.

C-Bilan du 3ème cas

Pour tout F et G on trouve 4 points bloquant toutes les trajectoires.

$$H_1\left(\frac{1}{2};\frac{p+q}{2}\right)\ ;\ H_2\left(\frac{1}{2};1-\frac{p+q}{2}\right); H_3\left(\frac{1}{2};\frac{q-p}{2}\right)\ ;\ H_4\left(\frac{1}{2};1-\frac{q-p}{2}\right)\ \text{si } q>p$$
$$H_1\left(\frac{1}{2};\frac{p+q}{2}\right)\ ;\ H_2\left(\frac{1}{2};1-\frac{p+q}{2}\right); H_5\left(\frac{1}{2};\frac{p-q}{2}\right)\ ;\ H_6\left(\frac{1}{2};1-\frac{p-q}{2}\right)\ \text{si } q<p$$
$$H_1\left(\frac{1}{2};\frac{p+q}{2}\right)\ ;\ H_2\left(\frac{1}{2};1-\frac{p+q}{2}\right); H_7\left(\frac{1}{2};0\right)\ ;\ H_8\left(\frac{1}{2};1\right)\ \text{si } q=p$$

.

Bilan des 3 cas:

Dans tous les cas envisagés, un nombre fini de boules permet de bloquer les trajectoires

4ème cas: La bille blanche est en I et la bille rouge en J, deux point quelconques du carré

Ainsi on pose :
$I(a;p)\ et\ J(b;q)\ avec\ 0\leq a\leq b\leq 1\ et\ 0\leq p\leq q\leq 1$
Ceci peut évidemment s'appliquer à tous points du carré puisque dans le cas où $a>b$ il suffira de prendre $I'(1-a;p)\ et\ J'(1-b;q)$ et dans celui où $p>q$ il suffira de prendre $I''(a;1-p)\ et\ J''(b;1-q)$
Et l'on va montrer que 16 points suffisent à bloquer toutes les trajectoires.
Nous allons donc à présent étudier toutes les trajectoires existantes qui sont toutes du type RISn-LAT-Gk_1-Dk_2.
Pour ce nous allons dans un premier temps montrer que l'on peut toujours se placer dans le cadre d'un repère permettant une trajectoire de type RISn pour ensuite déterminer les différents points des billes noires à l'aide du résultat obtenu pour dans le 3ème cas.

A-Changement de repère

Nous étudierons les trajectoires RISn entre les points I et J.
Tout d'abord nous allons montrer que l'on peut toujours choisir un repère orthogonal dans lequel on se ramène à F(0,p) et G(1,q) du cas précédent.

Les coordonnées de I et J dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ sont $I(a;p)$ et $J(b;q)$
Posons A',B' et D' tels que leurs coordonnées dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ soient $A'(a;0)$; $B'(b;0)$ et $D'(a;1)$.

De façon triviale on trouve que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires et qu'il en est de même pour $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{A'D'}$. Or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'D'}$ le sont aussi.
Ainsi le repère $(A',\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'D'})$ est orthogonal.
Et les coordonnées de I et J dans ce repère sont $I(0;p)$ et $J(1;q)$.
Ceci nous ramène donc au 3ème cas étudié et on a donc 4 points bloquant toutes les trajectoires dont les coordonnées dans le repère $(A',\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'D'})$ sont :
$H_1\left(\frac{1}{2};\frac{p+q}{2}\right)$; $H_2\left(\frac{1}{2};1-\frac{p+q}{2}\right)$; $H_3\left(\frac{1}{2};\frac{q-p}{2}\right)$; $H_4\left(\frac{1}{2};1-\frac{q-p}{2}\right)$
Ainsi en revenant au repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ leurs coordonnés sont :
$H_1\left(\frac{a+b}{2};\frac{p+q}{2}\right)$; $H_2\left(\frac{a+b}{2};1-\frac{p+q}{2}\right)$; $H_3\left(\frac{a+b}{2};\frac{q-p}{2}\right)$; $H_4\left(\frac{a+b}{2};1-\frac{q-p}{2}\right)$

Montrons à présent que ce changement de repère qui consiste à étirer l'axe des abscisses ou des ordonnées ne change pas la réflexion du billard.

Pour ce nous allons reprendre les équations décrivant une RISn dans le 3ème cas.

Alors si l'on passe d'un repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ à un repère $\left(A;\alpha\overrightarrow{AB};\beta\overrightarrow{AD}\right)$ où $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^{+*}$ on obtiendra des équations équivalentes monnayant une lègere modification.

Par pour le cas où n et k sont pairs on aura dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$:
$f_n^k(x)=(p+q-n)*x+k$

Et après étirement des abscisses par α et des ordonnées par β on aura toujours selon ce repère :

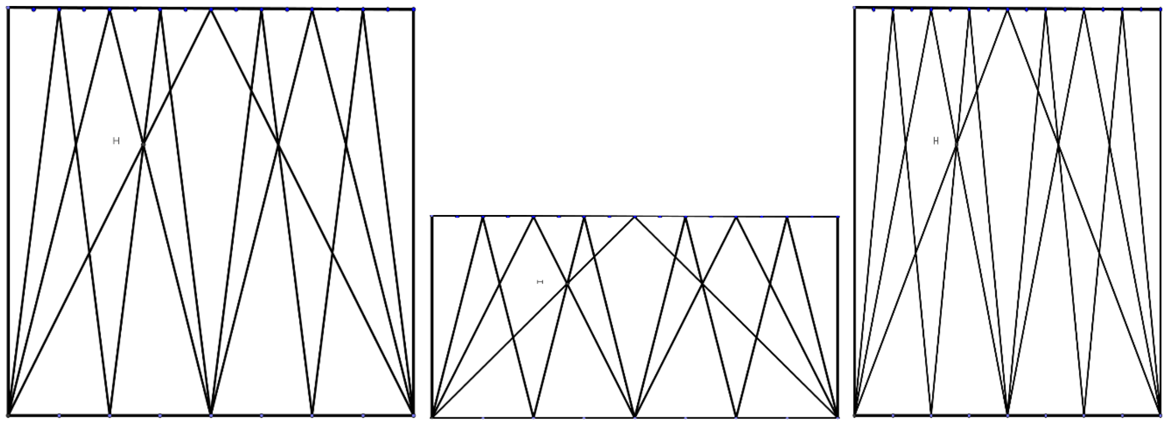
$$\frac{f_n^k(x)}{\beta}=(p+q-n)*\frac{x}{\alpha}+k$$

Et donc en passant au repère $\left(A;\alpha\overrightarrow{AB};\beta\overrightarrow{AD}\right)$ on obtient à nouveau :

$$f_n^k(x)=(p+q-n)*x+k$$

Et il en est de même pour les autres f_n^k.

Ainsi ce changement de repère n'a pas d'impact sur les trajectoires. Elles seront donc par exemple les mêmes pour ces trois exemples :



B−Equivalence de trajectoire

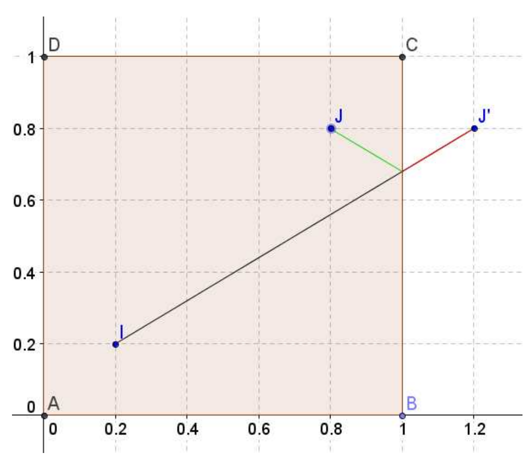
Nous allons à présent montrer que les trajectoires de type RISn−LAT−Gk_1−Dk_2 dans un carré on pour équivalents des trajectoires RISn dans un rectangle.

Tout d'abord on peut remarquer que k_1 et k_2 sont au maximum distants de 1.
En effet étant donné que les côtés opposés d'un carré sont parallèles et que les rebonds sont spéculaires, alors si la balle va d'un bord à l'autre elle ne peut faire demi−tour au milieu. La balle va donc successivement toucher le bord droit puis le bord gauche.
Or si l'écart est supérieur à 2 cela signifierait que la balle a touché deux fois d'affilée le même bord ce qui est impossible.
Ainsi on a : $k_1 = k_2 \pm 1$ ou $k_1 = k_2$

Maintenant nous allons décrire les différents cas de figures qui peuvent avoir lieu. Pour ce nous allons utiliser un raisonnement par récurrence.

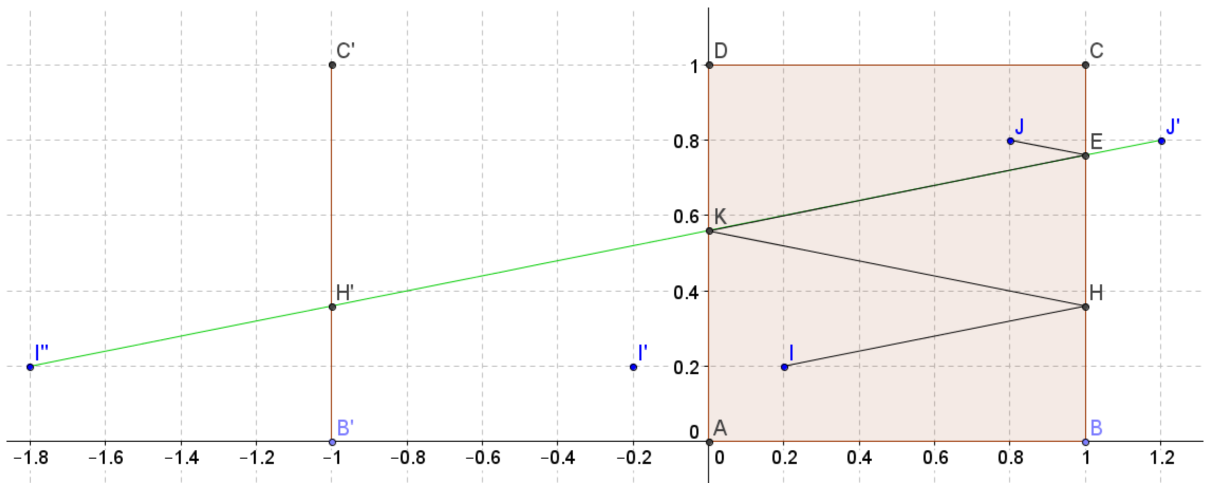
Mais tout d'abord nous allons introduire une nouvelle notion :

On dira qu'une trajectoire de type RISn−LAT−Gk_1−Dk_2 a pour caractéristiques SGk'_1−SDk'_2 où k'_1 est le nombre de fois que l'on a effectué la symétrie du point d'abscisse a à gauche et k'_1 le nombre de fois que l'on a effectué la symétrie du point d'abscisse b à droite. Ceci provient de la nature spéculaire des rebonds qui nous permet de transformer toutes trajectoires de type RISn−LAT−Gk_1−Dk_2 en trajectoires RISn dans un rectangle.
Mais quelques exemples permettraient de mieux comprendre cette notion.



La trajectoire ci contre est de type RIS$\mathbf{1}$ – LAT – G$\mathbf{0}$ – D1 et a pour caractéristiques SG0 – SD1 car on a aucun symétrique effectué à gauche et un symétrique effectué à droite pour la trajectoire totale $[IJ']$.

Il en est de même pour tous les RISn – LAT – G$\mathbf{0}$ – D1. (Cela revient au même quel que soit n car il n'y a toujours qu'un rebond sur un bord).



La trajectoire ci – dessus est de type RIS$\mathbf{1}$ – LAT – G1 – D2 et a pour caractéristiques SG2 – SD1 car on a 2 symétriques effectué à gauche et 1 symétrique effectué à droite pour la trajectoire totale $[I''J']$.

Il en est donc de même pour tout RISn – LAT – G1 – D2.

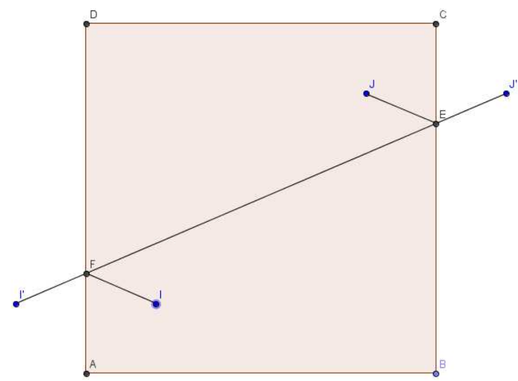
On va donc associer à chaque RISn – LAT – Gk_1 – Dk_2 ses caractéristiques SGk'_1 – SDk'_2. Pour ce nous allons raisonner par récurrence en cherchant dans un premier temps les différents premiers cas pour ensuite les reproduire dès que k_1 et k_2 augmentent tous les deux de 2.

Initialisation :

Pour cette partie nous établirons graphiquement les équivalences pour tous k_1 et k_2 inférieurs à 2.

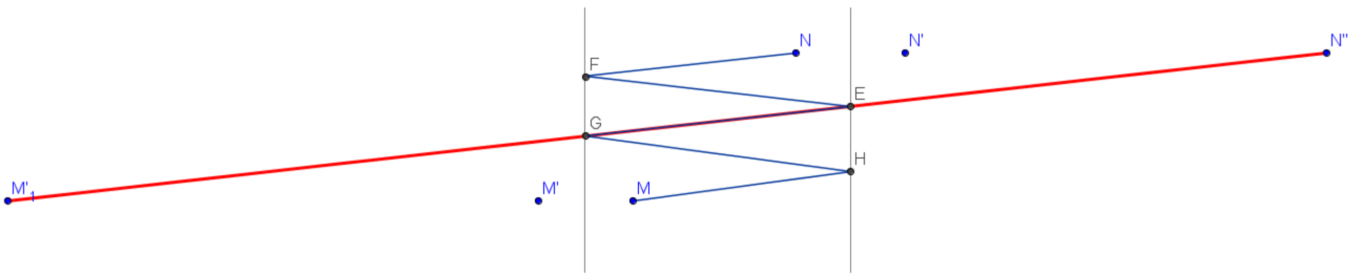
- Si $k_1 = k_2 = 0$ alors c'est une RISn classique et $k'_1 = k'_2 = 0$
- Si $k_1 = 0 \; et \; k_2 = 1$ alors c'est notre premier exemple utilisé précédemment et on a $k'_1 = 0 \; et \; k'_2 = 1$
- Si $k_1 = 1 \; et \; k_2 = 0$ alors de la même façon on trouve $k'_1 = 1 \; et \; k'_2 = 0$

- Si $k_1 = k_2 = 1$ alors on a $k'_1 = k'_2 = 1$. (voir figure ci – contre)
- Si $k_1 = 1 \; et \; k_2 = 2$ alors c'est notre deuxième exemple utilisé précédemment et on a $k'_1 = 2 \; et \; k'_2 = 1$
- Si $k_1 = 2 \; et \; k_2 = 1$ alors de la même façon on trouve $k'_1 = 1 \; et \; k'_2 = 2$



Hérédité :

Montrons à présent que si k_1 et k_2 donnent k'_1 et k'_2 alors $k_1 + 2$ et $k_2 + 2$ donnent $k'_1 + 2$ et $k'_2 + 2$.



En effet, ajouter 2 à k_1 et à k_2 revient à rajouter le parcours en bleu. Or ce parcours se caractérise par la trajectoire en rouge qui ne perturbe pas le sens de la trajectoire globale et qui ne fait que rajouter 2 symétriques à gauche et 2 à droite.

Conclusion :

Ainsi en combinant ces deux étapes on obtient les équivalences suivantes :

Soit k un entier positif et pair quelconque.

Alors on a 6 cas possibles :

a. RISn – LAT – Gk – Dk a pour caractéristiques SGk – SDk
b. RISn – LAT – Gk – D$(k+1)$ a pour caractéristiques SGk – SD$(k+1)$
c. RISn – LAT – G$(k+1)$ – Dk a pour caractéristiques SG$(k+1)$ – SDk
d. RISn – LAT – G$(k+1)$ – D$(k+1)$ a pour caractéristiques SG$(k+1)$ – SD$(k+1)$
e. RISn – LAT – G$(k+1)$ – D$(k+2)$ a pour caractéristiques SG$(k+2)$ – SD$(k+1)$
f. RISn – LAT – G$(k+2)$ – D$(k+1)$ a pour caractéristiques SG$(k+1)$ – SD$(k+2)$

C – Milieu des équivalents

Maintenant nous allons déterminer pour chacun des équivalents de trajectoires (définis par les caractéristiques SGk'_1 – SDk'_2) son milieu. Nous nommerons $[I';J']$ le segment représentant cette équivalence

1. *Calcul des coordonnées de I' et de J'*

Mais tout d'abord il nous faut déterminer les coordonnées des 2 points du segment en fonction de celles de I, de J et de SGk'_1 – SDk'_2.

Les points I' et J' sont obtenus suite à des symétries effectuées par rapport aux bords latéraux du carré. Plus précisément k'_1 symétries pour I' et k'_2 pour J'.

Ainsi les ordonnées de I' et J' sont respectivement les mêmes que celles de I et J, soit p et q.

Déterminons à présent les abscisses de ces points que nous nommerons a' pour I et b' pour J.

- Déterminons a'

Cette valeur dépend donc d'un certain nombre de symétriques du point d'ordonnée a. Elle est donc fonction de a et de k'_1.

On trouve que pour tout k'_1 entier positif

$a' = -k'_1 + a \;\; si\ k'_1\ est\ pair$

$a' = -k'_1 + 1 - a \;\; si\ k'_1\ est\ impair$

Montrons ceci par récurrence :

Initialisation :

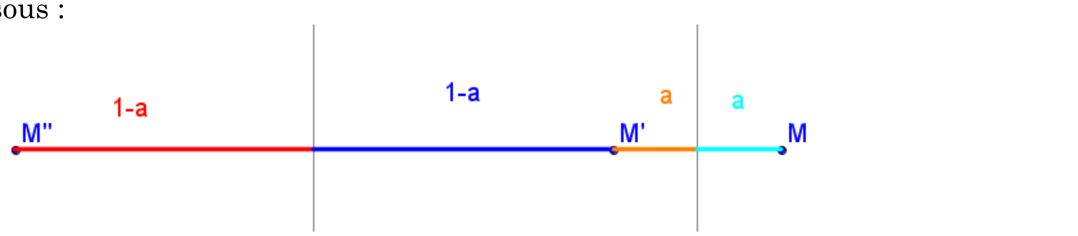
Si $k'_1 = 0$ alors $a' = a$ car il n'y a pas de rebond sur le bord latéral gauche.

Si $k'_1 = 1$ alors $a' = -a$ car il y a un seul rebond sur le bord latéral gauche et l'on a donc une symétrie.

Hérédité :

Si pour un k'_1 donné la propriété est vraie, alors montrons qu'elle est vraie également pour $k'_1 + 2$.

En effet rajouter deux symétrie revient à ajouter le segment [M" ; M] visible ci–dessous :



Et on a :

$[M'';M] = 1 - a + 1 - a + a + a = 2$

Cela revient donc à ajouter 2.

Conclusion :

Ainsi en combinant ces deux étapes on a bien pour tout k'_1 entier positif

$a' = -k'_1 + a \;\; si\ k'_1\ est\ pair$

$a' = -k'_1 + 1 - a \;\; si\ k'_1\ est\ impair$

- Déterminons b'

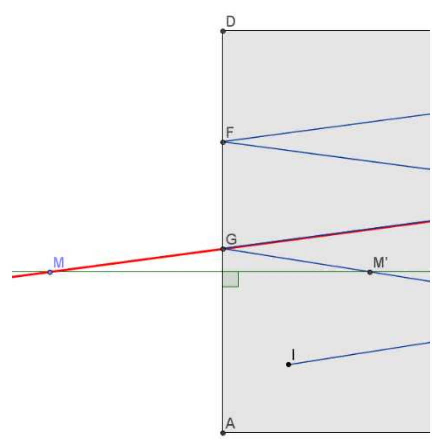
De la même façon on obtient b' en fonction de b et de k'_2. (Cela se démontre également par récurrence).
Ainsi on a pour tout k'_2 entier positif
$b' = k'_2 + b \;\; si\ k'_1\ est\ pair$
$b' = k'_2 + 1 - b \;\; si\ k'_1\ est\ impair$

2. *Calcul des milieux*

Ainsi toutes les trajectoires de type RISn–LAT–Gk_1–Dk_2 dans le carré ABCD se ramènent à des trajectoires de type RISn dans le rectangle A'B'C'D' avec
$A'(a',0);\ B'(b',0);\ C'(b',1);\ D'(a',1)$.
Or dans ce dernier cas on est dans un cas que l'on connait et où 4 boules noires d'abscisses le milieu des bords droits et gauche du rectangles suffisent à bloquer toute trajectoire.
On va donc à présent calculer ce milieu que nous noterons m.
Et on a donc : $m = \frac{a'+b'}{2}$

Cependant nous cherchons une abscisse faisant partie du carré. Nous noterons m' cette abscisse et on a : $0 \leq m' \leq 1$.
Ceci est nécessaire car m n'est pas nécessairement compris entre 0 et 1. On a plutôt :
$-1 \leq m \leq 2$.
(Ceci provient du fait qu'il ne peut y avoir plus d'un rebond d'écart entre le bord droit et le bord gauche).
On sera donc confronté à trois cas différents :

- $-1 \leq m < 0$



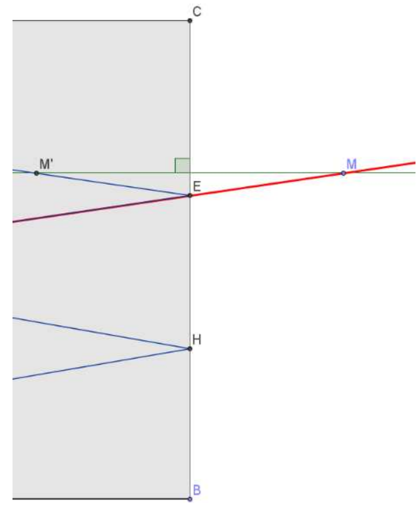
Dans ce cas il s'agit de réaliser une symétrie par rapport à la droite (AD) afin d'obtenir m' comme on le voit sur l'image ci–dessus où M représente le milieu et M' le point de coordonnées$(m';y_M)$.
Ainsi on a :
$m' = -m$

o $0 \leq m \leq 1$

Dans ce cas comme m est dans le bon intervalle on a simplement :
$m' = m$

o $1 < m \leq 2$

Dans ce cas il s'agit de réaliser une symétrie par rapport à la droite (BC) afin d'obtenir m' comme on le voit sur l'image ci–contre où M représente le milieu et M' le point de coordonnées$(m';y_M)$.
Cette symétrie signifie que :
$m' + m = 2$
Et donc on a :
$m' = 2 - m$



A présent on va donc calculer m' pour chacun des 6 cas trouvés dans la partie B.
Soit k un entier positif et pair quelconque.

a. Pour RISn–LAT–Gk–Dk

Ses caractéristiques sont SGk–SDk.
Donc on a :
$a' = -k + a$ (car k pair)
$b' = k + b$ (car k pair)
Ainsi :

$$m = \frac{a' + b'}{2} = \frac{-k + a + k + b}{2} = \frac{a + b}{2}$$

Ainsi $0 \leq m \leq 1$ et par conséquent :

$$m' = \frac{a + b}{2}$$

Ainsi 4 balles noires d'abscisse m' bloquent toutes les trajectoires de ce type.

b. Pour RISn–LAT–Gk–D$(k+1)$

Ses caractéristiques sont SGk–SD$(k+1)$
Donc on a :
$a' = -k + a$
$b' = (k + 1) + 1 - b$

Ainsi :

$$m = \frac{a' + b'}{2} = \frac{-k + a + k + 2 - b}{2} = 1 - \frac{b - a}{2}$$

Or $b \geq a$ donc $0 \leq m \leq 1$ et par conséquent :

$$m' = 1 - \frac{b - a}{2}$$

c. Pour RISn – LAT – G$(k+1)$ – Dk

Ses caractéristiques sont SG$(k+1)$ – SDk
Ainsi :

$$m = \frac{a' + b'}{2} = \frac{(-(k+1) + 1 - a) + (k + b)}{2} = \frac{-k - a + k + b}{2} = \frac{b - a}{2}$$

Or $b \geq a$ donc $0 \leq m \leq 1$ et par conséquent :

$$m' = \frac{b - a}{2}$$

d. Pour RISn – LAT – G$(k+1)$ – D$(k+1)$

Ses caractéristiques sont SG$(k+1)$ – SD$(k+1)$
Ainsi :

$$m = \frac{a' + b'}{2} = \frac{(-(k+1) + 1 - a) + ((k+1) + 1 - b)}{2} = 1 - \frac{a + b}{2}$$

Or $0 \leq \frac{a+b}{2} \leq 1$ donc $0 \leq m \leq 1$ et par conséquent :

$$m' = 1 - \frac{a + b}{2}$$

e. Pour RISn – LAT – G$(k+1)$ – D$(k+2)$

Ses caractéristiques sont SG$(k+2)$ – SD$(k+1)$
Ainsi :

$$m = \frac{a' + b'}{2} = \frac{(-(k+2) + a) + ((k+1) + 1 - b)}{2} = \frac{a - b}{2}$$

Or $b \geq a$ et donc $-1 \leq m \leq 0$ et par conséquent :

$$m' = -m = -\frac{a-b}{2} = \frac{b-a}{2}$$

f. RISn – LAT – G$(k+2)$ – D$(k+1)$

Ses caractéristiques sont SG$(k+1)$ – SD$(k+2)$
Ainsi :

$$m = \frac{a'+b'}{2} = \frac{(-(k+1)+1-a)+((k+2)+b)}{2} = 1 + \frac{b-a}{2}$$

Or $b \geq a$ et donc $1 \leq m \leq 2$ et par conséquent :

$$m' = 2 - m = 2 - \left(1 + \frac{b-a}{2}\right) = 1 - \frac{b-a}{2}$$

Au final on constate qu'il n'existe que 4 m' différents :

$$S = \left\{\frac{a+b}{2}\,; 1 - \frac{a+b}{2}\,; \frac{b-a}{2}\,; 1 - \frac{b-a}{2}\right\}$$

Et étant donné que l'on a décrit toutes les possibilités de trajectoires dans un carré, pour chaque I et J quelconques on peut se ramener 4 fois au cas précédent.

D – Bilan

Ainsi quelque soient $I(a\,;p)$ *et* $J(b\,;q)$ deux points quelconques du carré il existe toujours au maximum 16 points passant par toutes les trajectoires.

Autrement dit dans le cas du carré il est possible avec un nombre fini de boules noires de bloquer toutes les trajectoires possible entre la boule blanche et la boule rouge.
Dans le cas où $a \leq b$ et $p \leq q$ ces points sont :

$H_1\left(\frac{a+b}{2};\frac{p+q}{2}\right)$; $H_2\left(\frac{a+b}{2};1-\frac{p+q}{2}\right)$; $H_3\left(\frac{a+b}{2};\frac{q-p}{2}\right)$; $H_4\left(\frac{a+b}{2};1-\frac{q-p}{2}\right)$;
$H_5\left(1-\frac{a+b}{2};\frac{p+q}{2}\right)$; $H_6\left(1-\frac{a+b}{2};1-\frac{p+q}{2}\right)$; $H_7\left(1-\frac{a+b}{2};\frac{q-p}{2}\right)$;
$H_8\left(1-\frac{a+b}{2};1-\frac{q-p}{2}\right)$; $H_9\left(\frac{b-a}{2};\frac{p+q}{2}\right)$; $H_{10}\left(\frac{b-a}{2};1-\frac{p+q}{2}\right)$;
$H_{11}\left(\frac{b-a}{2};\frac{q-p}{2}\right)$; $H_{12}\left(\frac{b-a}{2};1-\frac{q-p}{2}\right)$; $H_{13}\left(1-\frac{b-a}{2};\frac{p+q}{2}\right)$;
$H_{14}\left(1-\frac{b-a}{2};1-\frac{p+q}{2}\right)$; $H_{15}\left(1-\frac{b-a}{2};\frac{q-p}{2}\right)$; $H_{16}\left(1-\frac{b-a}{2};1-\frac{q-p}{2}\right)$