PROBLEME 6 : UN DINER QUI VA COUTER CHER

JEANDUSUD - LYCEE JEAN DURAND, CASTELNAUDARY

RESUME

QUESTION 1

Dans un premier temps nous avons trouvé l'ordre d'entrée des amis dans le restaurant présentant comme caractéristiques le fait de réaliser W_{max} et avons montré sa justesse avec quelques propriétés de divisibilité.

Ensuite nous avons déterminé W_{max} en fonction de n en étudiant les différents amis possibles pouvant entrer dans le restaurant à l'aide de propriétés élémentaires d'arithmétique. Finalement nous trouvons une formule en fonction du nombre de nombres premiers inférieurs à certaines valeurs et pouvons ensuite grâce au théorème des nombres premiers obtenir une approximation en fonction de n.

QUESTION 2

Pour répondre cette question nous avons tout d'abord minoré W_{min} avant de montrer que cette minoration est atteignable pour tout n. Au final on aboutit à une formule en fonction du nombre de nombres premiers inférieurs à n.

QUESTION 3

Pour les cas dont il est question ici nous avons établi les valeurs extrêmes que pouvaient prendre W_{max} et W_{min} en recourant à deux cas particuliers avant de proposer un encadrement de ces deux valeurs à partir des questions précédentes.

QUESTION 4

Pour cette question nous nous sommes tout simplement limités à encadrer $W(n)$ à l'aide des questions précédentes.

NOTATIONS :

On note :

- Σ_n l'addition du groupe lorsque le $n^{ème}$ ami est entré dans le restaurant et que lui ainsi que tous ses amis précédemment entrés sont satisfaits.
- A_i l'ami auquel on associe l'entier strictement positif a_i. A_i ne serait satisfait que si l'addition Σ_n est divisible par l'entier a_i. On considèrera que : $a_i < a_{i+1} \forall i \in \mathbb{N}^*$. On appellera cet ami « ami d'entier a_i » ou bien simplement « A_i »
- $\Omega = \{A_1 ;\ A_2 ; \dots ; A_n\}$ le groupe de n amis. On notera indifféremment A_k ou a_k.
- $E = [A_i ;\ A_j ; A_k]$ le sous-ensemble ordonné de Ω ($E \subset \Omega$). On le nomme groupe d'ordre E. Dans le cas présent ces trois amis entreront dans l'ordre « A_i puis A_j puis A_k ».
- $W(E)$ le nombre de fois que le groupe E appelle le serveur.

On appelle :

- *k-linéaire* un groupe de k amis pour lequel il existe un a_n pour n'importe quel entier compris entre 1 et k.

  Par exemple $\Omega = \{1 ;\ 2 ;\ 3 ;\ 4 ;\ 5\}$ est un groupe 5-linéaire

QUESTION 1

On note $W_{max}(\Omega)$ le nombre maximal de fois que le groupe Ω risque d'appeler le serveur.

Nous étudierons ici uniquement des groupes d'amis n-linéaires de n amis. Ainsi :

$$\Omega = \{1\ ;\ 2\ ; \dots ; n-1\ ; n\}$$

ORDRES D'ENTREE A ETUDIER

Tout d'abord nous allons chercher les ordres d'entrée des amis qui permettent d'obtenir $W_{max}(\Omega)$.

Soit l'ami A_n qui admet la décomposition suivante :

$$a_n = d_1 * d_2 \quad avec\ d_1, d_2 \in \mathbb{N}^*\ et\ d_1 \geq d_2$$

Ce qui revient à dire que d_1 et d_2 sont deux diviseurs de a_n.

On dit que A_n est satisfait si a_n divise Σ.
Or si a_n divise Σ alors d_1 et d_2 divisent également Σ, et les amis d'entiers d_1 et d_2 sont satisfaits.

Au contraire, d_1 et d_2 satisfaits n'impliquent pas a_n satisfait.
En effet si $\Sigma = 4$, $d_1 = 2$ et $d_2 = 4$ sont satisfaits mais $a_n = d_1 * d_2 = 8$ ne l'est pas.

> **Corollaire du théorème de Gauss**
>
> Soient $a, b, c \in \mathbb{N}^*$
> Si a et b divisent c et si a et b sont premiers entre eux alors ab divise

Néanmoins on peut relever le cas particulier où d_1 et d_2 sont premiers entre eux.
En effet si d_1 et d_2 divisent Σ alors d'après le corollaire du théorème de Gauss (voir ci-contre) on a $d_1 * d_2$ qui divise Σ et donc a_n qui divise Σ.
Ce qui signifie que dans ce cas si D_1 et D_2 sont satisfaits alors A_n l'est.

Soit d un diviseur de a_n différent de a_n.
Alors le groupe d'ordre $[a_n\ ;\ d\ ]$ va appeler le serveur 1 fois alors que le groupe d'ordre $[d\ ; a_n]$ l'appellera 2 fois.
Néanmoins si l'on a p un entier strictement inférieur à a_n et qui ne divise pas a_n, alors les groupes d'ordres $[a_n\ ;\ p\ ]$ et $[p\ ; a_n\ ]$ vont appeler le serveur 2 fois chacun.
Ainsi quel que soit l'entier $a_k < a_n$ on a $W[a_n\ ;\ a_k]\ \leq W[a_k\ ;\ a_n]$
Pour obtenir un W maximal il suffit donc que les amis aux nombres les plus petits rentrent les premiers.

On a donc $W_{max}(\Omega)$ qui est obtenu lorsque l'ordre d'entrée du groupe est :

$$[a_1 \,;\, a_2 \,;\, \dots ; a_{n-1} \,; a_n] \; avec \; a_i > a_{i-1} \; \forall i \geq 2$$

Comme nous travaillons ici avec des groupes d'amis n-linéaires on obtient $W_{max}(\Omega)$ lorsque le groupe possède l'ordre :

$$[1 \,; 2 \,; 3 \,; \dots ; n-1 \,; n] \; avec \; n \in \mathbb{N}^*$$

ESTIMATION DE W_{MAX}

Il a été vu précédent que pour n amis un ordre d'entrée permettant d'obtenir W_{max} est :

$$[1 \,; 2 \,; 3 \,; \dots ; n-1 \,; n] \; avec \; n \in \mathbb{N}^*$$

CROISSANCE

Tout d'abord montrons que si la taille du groupe d'amis augmente, W_{max} augmente également. Autrement dit la fonction W_{max} en fonction de n est croissante.

En effet soit un groupe de n amis dont on notera $W_{max}(n)$ le nombre d'appels. Alors le groupe de n+1 amis aura comme ordre d'entrée pour obtenir W_{max} :

$$[1 \,; 2 \,; 3 \,; \dots ; n-1 \,; n \,; n+1] \; avec \; n \in \mathbb{N}^*$$

Ainsi lorsque le $n^{ème}$ ami est entré et que les désaccords ont été réglés, alors le nombre d'appels s'élève à $W_{max}(n)$ Entre alors le $(n+1)^{ème}$ ami (a_{n+1})et :

- Soit a_{n+1} divise Σ_n et donc a_{n+1} est satisfait, alors $W_{max}(n+1)=W_{max}(n)$
- Soit a_{n+1} ne divise pas Σ_n et donc a_{n+1} n'est pas satisfait. Il va alors appeler le serveur et $W_{max}(n+1)=W_{max}(n)+1$.

Ainsi on a :

$$W_{max}(n+1) \geq W_{max}(n) \forall n \in \mathbb{N}^*$$

LES DIFFERENTS CAS

Soit $1 \leq i \leq n$, alors A_i d'entier $a_i = i$ appellera le serveur si i ne divise pas Σ_{i-1}.
Il faut donc déterminer quels i diviseront Σ_{i-1}.

PREMIER NOMBRE

C'est-à-dire si $i = 1$

1 va être le premier à entrer, il va donc appeler le serveur.

NOMBRES PREMIERS

On a donc $i \in \mathbb{P}$

Σ_{i-1} admet plusieurs diviseurs, il est donc composé. Or tout nombre composé admet une unique décomposition de la forme :

$$\Sigma_{i-1} = p_1^{\propto_1} p_2^{\propto_2} \dots p_r^{\propto_r} \ avec \ p_k \in \mathbb{P} \ et \ \propto_k \in \mathbb{N} \ \ \forall k \in [1\,;r]$$

Tous ces nombres premiers sont inférieurs strictement à i car ils sont inférieurs aux entiers le précédant.

Ainsi si i est un nombre premier, alors il ne divise pas Σ_{i-1}. On a donc W_{max} qui est supérieur au nombre de nombres premiers compris entre 1 et n.

NOMBRES COMPOSES

Ici $i \notin \mathbb{P} \ et \ i \neq 1$

Tout nombre composé i peut s'écrire de la façon suivante :

$$i = d_1 * d_2 \quad avec \ d_1, d_2 \in \mathbb{N}^* \ et \ n > d_1 \geq d_2 > 1$$

On peut séparer les nombres composés en deux catégories :

- Ceux admettant d_1, d_2 tels que $d_1 \ et \ d_2$ soient premiers entre eux.
- Les autres : ceux n'ayant pas cette caractéristique.

LES PRODUITS DE NOMBRES ETRANGERS

Comme $d_1 \ et \ d_2$ sont entrés avant i alors on a $d_1 \ et \ d_2$ qui divisent Σ_{i-1}.
Or $d_1 \ et \ d_2$ sont étrangers donc d'après le corollaire du théorème de Gauss, $d_1 * d_2 = i$ divise également Σ_{i-1} et donc $\Sigma_i = \ \Sigma_{i-1}$ ce qui signifie que A_i est satisfait et qu'il n'appellera pas le serveur.

LES NON-PRODUITS DE NOMBRES ETRANGERS

Comme tout entier naturel non nul, i admet une unique décomposition en facteurs premiers :

$$i = p_1^{\propto_1} p_2^{\propto_2} \dots p_r^{\propto_r} \ avec \ p_l \in \mathbb{P} \ et \ \propto_l \in \mathbb{N}^* \ \ \forall l \in [1\,;r]$$

Ainsi $\forall k, j \in [1\,;r]$ on a $p_l \ et \ p_j$ étrangers et par conséquent $p_l^{\propto_l} \ et \ p_j^{\propto_j}$ étrangers également.

En effet $p_l^{\propto_l}$ aura pour diviseurs tous les entiers de la forme p_l^k avec $k \in [0\,;\ \alpha_i]$ mais aucun d'eux n'est p_j. Ainsi $PGCD\left(p_l^{\propto_l}\,;\ p_j\right) = 1$, ce qui signifie que $p_l^{\propto_l}\ et\ p_j$ sont étrangers.
De même on obtient que $p_l^{\propto_l}\ et\ p_j^{\propto_j}$ sont étrangers.

Donc si i est non-produit de nombres étrangers alors i est un multiple d'un unique nombre premier que nous noterons p_k. On a donc :

$$i = p_k^{\propto_k}\ avec\ p_k \in \mathbb{P}\ et\ \propto_k \in \mathbb{N}$$

On a donc trois cas :

- Soit $\propto_k = 0$ et $i = 1$ ce qui nous ramène à un cas précédemment étudié
- Soit $\propto_k = 1$ et $i = p_k \iff i \in \mathbb{P}$ ce qui nous ramène également à un cas précédemment étudié
- Soit $\propto_k > 1$ et $i = p_k^{\propto_k}$

Etudions donc le troisième cas. Ainsi A_i sera satisfait si $p_k^{\propto_k}$ divise Σ_{i-1}.

Montrons que $i = p_k^{\propto_k}$ ne divise pas Σ_{i-1}.
Pour ce nous allons d'abord étudier le cas général de l'évolution de Σ_n.

Evolution de Σ_n

Si A_k entre dans le restaurant alors on va avoir :

$$\Sigma_k = PPCM(\Sigma_{k-1}\,; a_k)$$

En effet Σ_{k-1} est le plus petit entier divisible par tous les amis entrés avant A_k et donc il faut que Σ_k soit le plus petit entier divisible par tous les amis entrés avant A_k et par A_k lui-même.

Ainsi on a :

$$\Sigma_k = \Sigma_{k-1} * \frac{a_k}{PGCD(\Sigma_{k-1}\,; a_k)}$$

Soient les décompositions en facteurs premiers suivantes :

$$a_k = p_1^{\propto_1} p_2^{\propto_2} \dots p_r^{\propto_r}\ avec\ p_i \in \mathbb{P}\ et\ \propto_i \in \mathbb{N}\ \ \forall i \in [1\,; r]$$

$$\Sigma_{k-1} = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}\ avec\ p_i \in \mathbb{P}\ et\ \beta_i \in \mathbb{N}\ \ \forall i \in [1\,; r]$$

Alors a_k est un diviseur de Σ_{k-1} si et seulement si $\forall i \in [1\,; r]$ on a $0 \leq \alpha_i \leq \beta_i$.

Donc soit a_k divise Σ_{k-1} auquel cas $PGCD(\Sigma_{k-1}\,; a_k) = a_k$ et par conséquent : $\Sigma_k = \Sigma_{k-1}$

Soit a_k ne divise pas Σ_{k-1} et par conséquent cela signifie qu'il existe au moins un p_i pour lequel $\alpha_i - \beta_i > 0$.

Considérons le cas où il n'y a qu'un p_i pour lequel on a cette caractéristique. (S'il y en a plusieurs les résultats sont similaires)

Alors on a

$$\frac{p_1^{\propto_1} p_2^{\propto_2} \dots p_r^{\propto_r}}{p_i^{\alpha_i-\beta_i}} = \frac{a_k}{p_i^{\alpha_i-\beta_i}}$$

Qui divise Σ_{k-1}

Et par conséquent :

$$PGCD(\Sigma_{k-1}\,; a_k) = \frac{a_k}{p_i^{\alpha_i-\beta_i}}$$

Et donc :

$$\Sigma_k = \Sigma_{k-1} * {a_k}\Big/{\frac{a_k}{p_i^{\alpha_i-\beta_i}}}$$

$$= \Sigma_{k-1} * p_i^{\alpha_i-\beta_i}$$

Pour un p_i donné on note α_{imax} le plus grand α_i parmi tous les amis entrés avant A_k.
Alors on a $\beta_i = \alpha_{imax}$.

Retour au cas particulier

Revenons donc à ce à quoi nous nous étions arrêtés. Montrons donc que $i = p_r^{\propto_k}$ ne divise pas Σ_{i-1}.

Comme le groupe entre par ordre croissant, alors on a $a_{i-1} < a_i$ et donc pour tout $i' \in [1\,; i[$ on a $i' < p_r^{\propto_k}$et donc $1 \leq {\propto_k}' < \propto_k$.

Par ailleurs on a forcément un ami d'entier $p_r^{\propto_k-1}$ qui est entré avant.

On aura donc :

$$\Sigma_k = \Sigma_{k-1} * p_r$$

Et donc A_i appellera le serveur.

CONCLUSION

Finalement on a:

$$\boldsymbol{W_{max}(n) = 1 + \pi(n) + \omega(n)}$$

Où :

$\pi(n)$ est la quantité totale de nombres premiers situés dans l'intervalle d'entiers $[1\ ;\ n]$

$\omega(n)$ est la quantité totale de nombres situés dans l'intervalle d'entiers $[1\ ;\ n]$ s'écrivant de la forme

$$i = p_k^{\propto_k}\ avec\ p_k \in \mathbb{P}\ et\ \propto_k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$

APPROCHE DE LA VALEUR DE W_{max}

La formule précédente nous permet d'obtenir une valeur pour tout n, néanmoins elle nécessite de tester tous les nombres inférieurs à n afin de trouver ceux appartenant à $\pi(n)$ et ceux appartenant à $\omega(n)$.

C'est pourquoi il pourrait être intéressant d'avoir une façon d'obtenir une valeur approchée lorsque n est trop grand pour que des calculs soient faits de façon informatique.

$\pi(n)$

Le théorème des nombres premiers annonce que :

Lorsque $x \to +\infty$, on a : $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)}$

$\omega(n)$

Pour estimer celui-ci, il faut estimer le nombre de $p_k^{\propto_k}$ compris entre 1 et n quel que soit $\propto_k > 1$.

Ainsi pour $\propto_k = 2$ le nombre de $p_k^{\propto_k}$ inférieur à n est égal à $\pi\left(E\left(\sqrt{n}\right)\right)$
(où $E(x)$ est la partie entière de x)

De même quel que soit $\propto_i$ le nombre de $p_k^{\propto_k}$ inférieur à n est égal à $\pi\left(E\left(\sqrt[\alpha]{n}\right)\right)$

Ceci est valable tant qu'il est possible d'obtenir un $p_k^{\propto_k}$ inférieur à n. Le plus petit nombre premier étant 2 cela signifie qu'on a $2 \leq 2^{\alpha_{max}} \leq n$
Ou encore : $\log_2(2) \leq \alpha_{max} \leq \log_2(n)$
$\Leftrightarrow\ 1 \leq \alpha_{max} \leq \mathrm{E}(\log_2 n)$
(où $\log_2(n) = \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$)

On a donc :

$$\omega(n) = \sum_{\alpha=1}^{\mathrm{E}(\log_2 n)} \pi\left(E\left(\sqrt[\alpha]{n}\right)\right)$$

BILAN

On a donc la relation suivante en fonction de $\pi(n)$

$$\boldsymbol{W_{max}\,(n) = 1 + \pi(n) + \sum_{\alpha=1}^{\mathrm{E}(\log_2 n)} \pi\left(E\left(\sqrt[\alpha]{n}\right)\right)}$$

Ainsi on a l'approximation suivante :

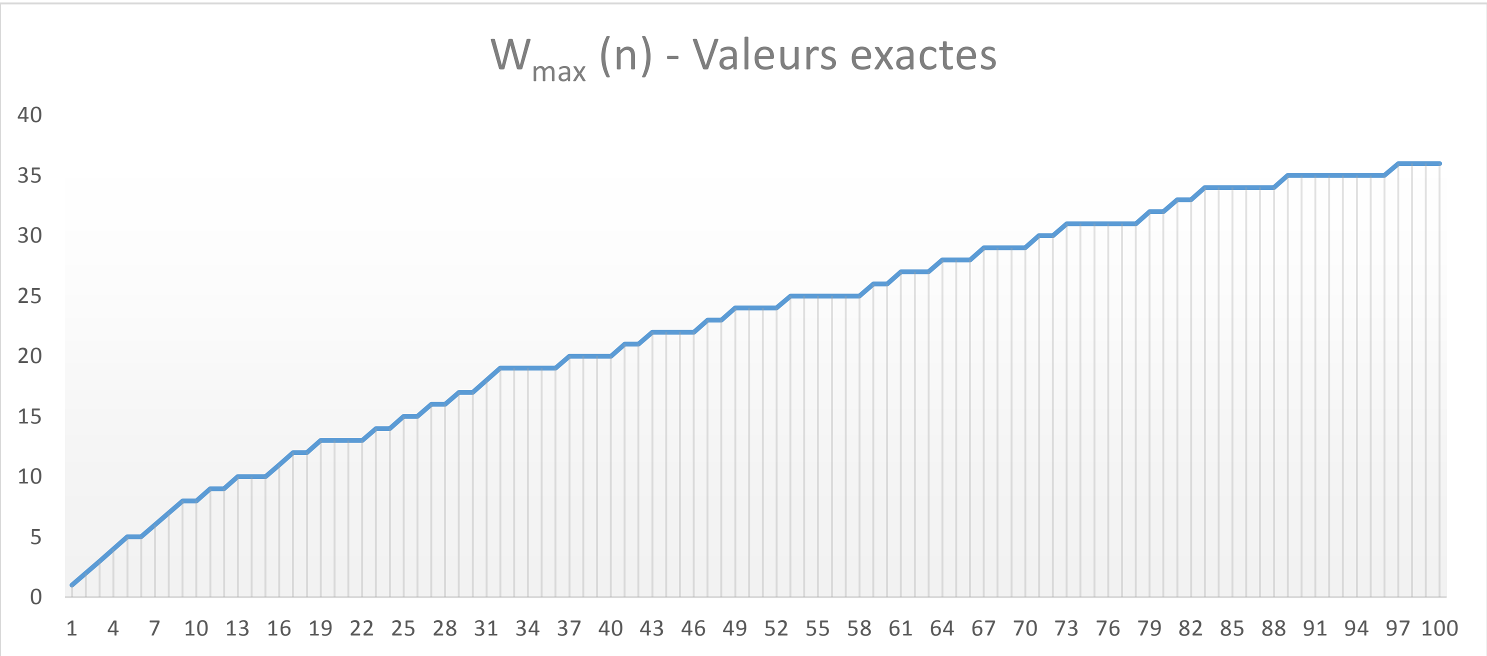
$$W_{max}\,(n) \approx 1 + \frac{n}{\ln(n)} + \sum_{\alpha=1}^{\mathrm{E}(\log_2 n)} \frac{E\left(\sqrt[\alpha]{n}\right)}{\ln\left(E\left(\sqrt[\alpha]{n}\right)\right)}$$

(On peut noter que l'approximation est plus précise lorsque n tend vers $+\infty$).

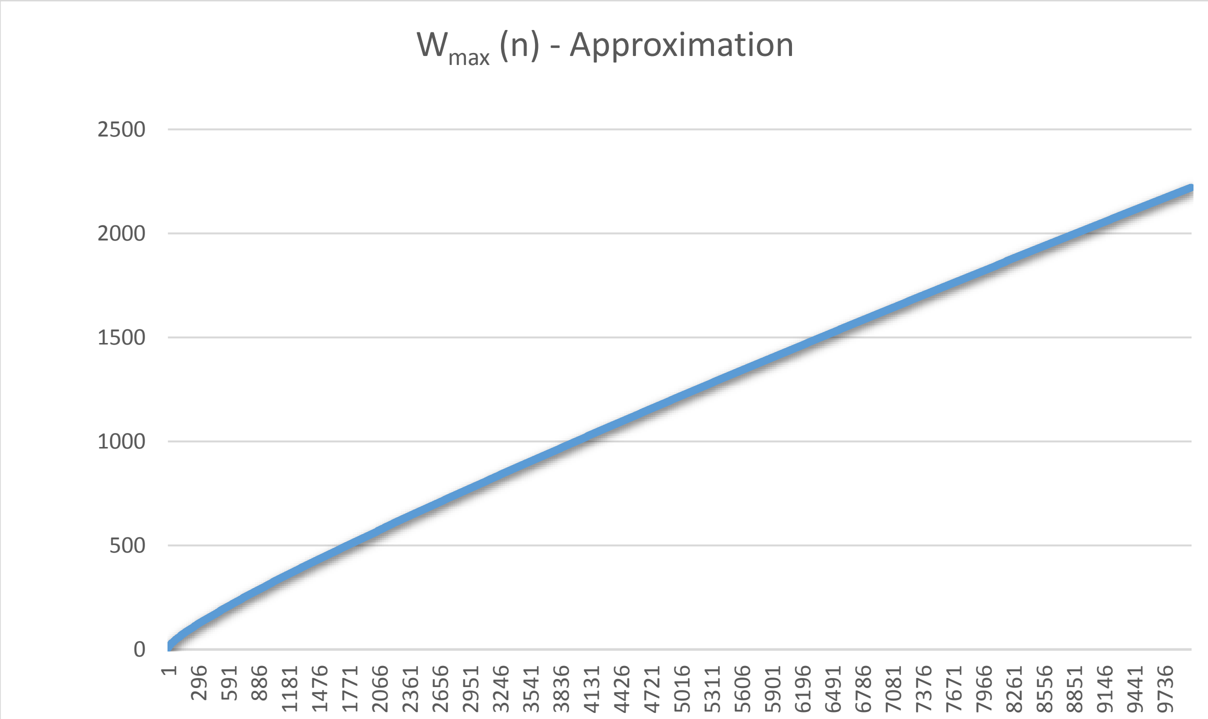
QUELQUES VALEURS…

Nous allons maintenant mettre en pratique ceci pour calculer quelques valeurs de W_{max}.

Tout d'abord voici les 100 premières valeurs calculées exactement par un algorithme codé en langage Python.



Ensuite nous pouvons utiliser l'approximation trouvée pour tester de valeurs plus grandes. Ainsi par cette méthode on peut obtenir une approximation des 10 000 premières valeurs en peu de temps :



QUESTION 2

On note $W_{min}(\Omega)$ le nombre minimal de fois que le groupe puisse appeler le serveur.

Nous étudierons ici uniquement des groupes d'amis n-linéaires de n amis. Ainsi :

$$\Omega = \{1\,;\ 2\,;\ldots;n-1\,;n\}$$

Pour déterminer W_{min} nous allons d'abord le minorer et ensuite montrer qu'il existe un ordre d'entrée permettant d'arriver à cette minoration.

MINORATION DE W_{min}

Tout d'abord nous allons montrer que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$W_{min}(n) \geq \pi(n)$$

On a n fixé et Σ_n qui est l'addition du groupe lorsque tous les amis sont satisfaits.

Soit la décomposition en facteurs premiers de Σ_n suivante :

$$\Sigma_n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r}\ avec\ p_i \in \mathbb{P}\ et\ \beta_i \in \mathbb{N}^*\ \ \forall i \in [1\,;r]$$

Alors d'après ce que l'on a déjà vu dans la question 1 cela signifie que pour chaque p_i il est entré un ami A d'entier divisible par $p_i^{\beta_i}$.

Par ailleurs on a dans cette décomposition tous les nombres premiers inférieurs à n puisque tous les entiers inférieurs à n sont entrés dans le restaurant.

Ainsi pour chaque p_i il y a forcément un ami d'entier divisible par $p_i^{\beta_i}$ qui est entré et qui n'était pas satisfait.

Il suffit donc de montrer qu'il ne peut y avoir un ami A d'entier a qui soit à la fois divisible par $p_i^{\beta_i}$ et par $p_j^{\beta_j}$ $\forall i,j \in [1\,;r]$.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'un tel ami existe.

On pose donc : $a = p_i^{\beta_i} * p_j^{\beta_j}$
(le raisonnement fonctionne également si l'on augmente le nombre de puissances de nombres premiers).

Par ailleurs on a : $n \geq a$

On rappelle que pour un p_i donné alors β_i est la puissance maximale qu'il puisse y avoir pour $p_i^{\beta_i}$ inférieur à n.
p_i étant positif on a : $p_i^{\beta_i+1} > p_i^{\beta_i}$
Or on a $p_i^{\beta_i+1} > n$ puisque sinon cela signifierait que β_i n'est pas le maximum.

Ainsi :

$$p_i^{\beta_i} * p_i > n$$
$$\Leftrightarrow p_i^{\beta_i} > \frac{n}{p_i}$$

De même on a :

$$p_j^{\beta_j} > \frac{n}{p_j}$$

Et par conséquent :

$$a > \frac{n^2}{p_i * p_j}$$

Et on a donc :

$$n > \frac{n^2}{p_i * p_j}$$
$$\Leftrightarrow p_i * p_j > n$$

Ainsi :

$$p_i^{\beta_i} * p_j^{\beta_j} > n$$
$$\Leftrightarrow a > n$$

Ce qui est absurde.
Ainsi l'hypothèse de départ est fausse et on ne peut avoir un ami d'entier A qui va être divisible par deux puissances de nombres premiers.

Ainsi on a :

$$W_{min}(n) \geq \pi(n)$$

DETERMINATION DE W_{min}

Nous allons à présent montrer que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$W_{min}(n) = \pi(n)$$

Pour ce nous allons simplement montrer qu'il existe à chaque fois un ordre de passage permettant d'arriver à ce résultat.

Nous allons considérer l'ordre suivant :
Dans un premier temps entrent les r amis d'entier $p_i^{\beta_i}$ puis ensuite entrent les autres amis.

On va donc avoir à la fin de la première étape :

$W(r) = \pi(n)$ puisque chacun de ses amis va être insatisfait lorsqu'il va rentrer

Et

$$\Sigma_r = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r} \; avec \; p_i \in \mathbb{P} \; et \; \beta_i \in \mathbb{N}^* \;\; \forall i \in [1\,;r]$$

Or ceci est la décomposition en facteurs premiers de Σ_n ce qui signifie que tous les autres amis qui vont entrer par la suite diviserons Σ_r.

On a donc : $\Sigma_n = \Sigma_r$

Et : $W(n) = W(r) = \pi(n)$

Ainsi cet ordre nous permet d'obtenir pour tout n naturel non nul :

$$W_{min}(n) = \pi(n)$$

CONCLUSION

Finalement on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boldsymbol{W_{min}(n) = \pi(n)}$$

Où $\pi(n)$ est la quantité totale de nombres premiers situés dans l'intervalle d'entiers $[1\,;\, n]$

APPROCHE DE LA VALEUR DE W_{min}

Encore une fois on va pouvoir utiliser le théorème des nombres premiers qui annonce que :

Lorsque $x \to +\infty$, on a : $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)}$

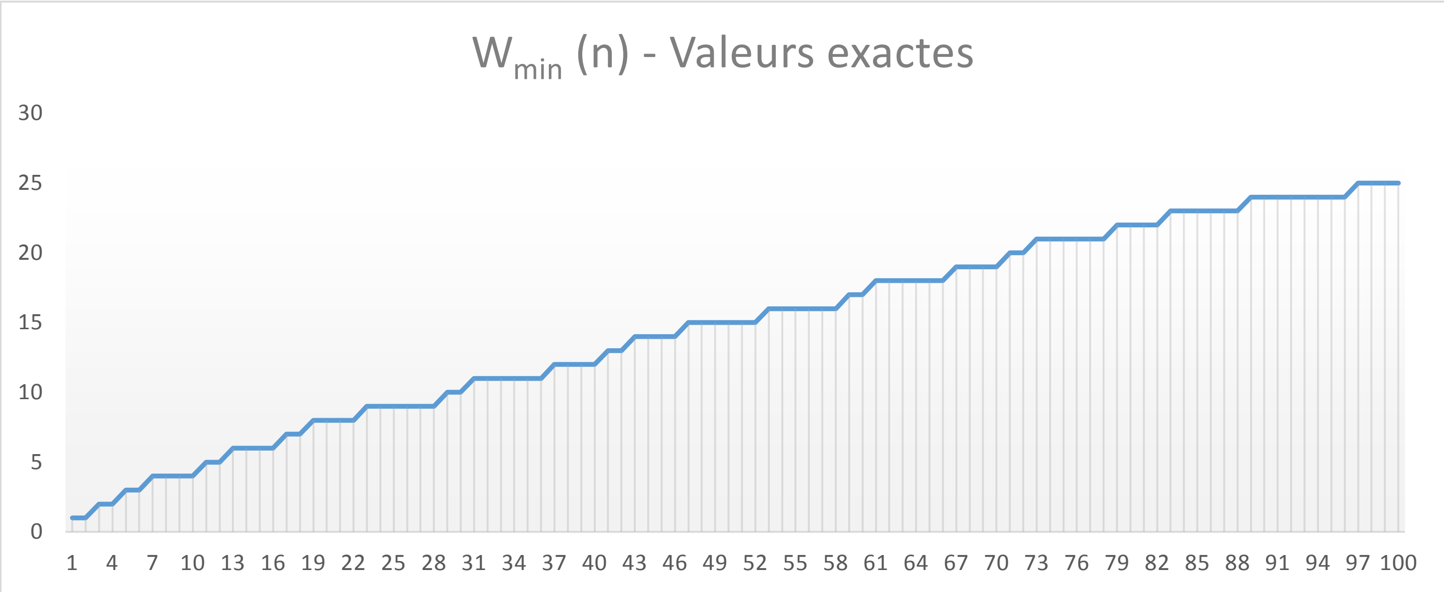
On a donc l'approximation suivante :

$$W_{min}\,(n) \approx \frac{n}{\ln(n)}$$

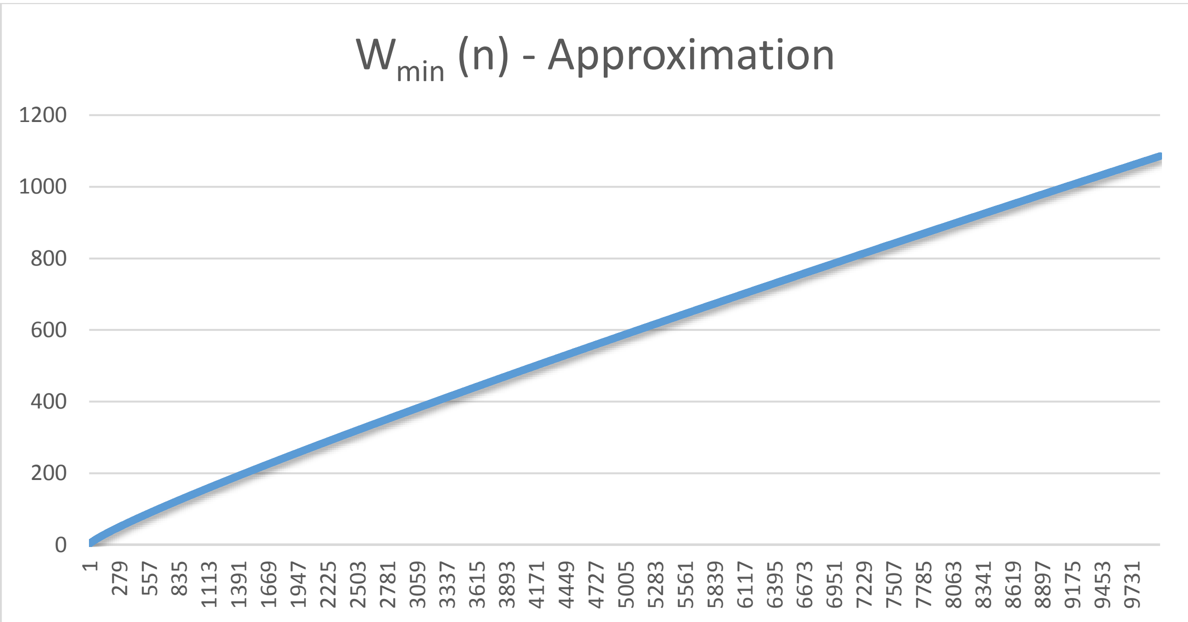
QUELQUES VALEURS…

Nous allons maintenant mettre en pratique ceci pour calculer quelques valeurs de W_{min}.

Tout d'abord voici les 100 premières valeurs exactes de W_{min}:



Ensuite nous pouvons utiliser l'approximation trouvée pour tester de valeurs plus grandes. Ainsi par cette méthode on peut obtenir une approximation des 10 000 premières valeurs en peu de temps :



QUESTION 3

On note toujours W_{max} le nombre maximal de fois que le groupe risque d'appeler le serveur et W_{min} le nombre minimal de fois que le groupe puisse appeler le serveur, mais nous étudierons à présent des groupes d'amis non linéaires. Ils auront à présent la forme suivante, avec pour k amis :

$$\Omega = \{a_1; a_2; \dots; a_k\}\ avec\ a_i > a_{i-1}\ \forall i \in [2; k]\ et\ a_i \in \mathbb{N}^*$$

Nous allons donc dans un premier temps chercher le W_{max} le plus grand possible et le W_{min} le plus petit pour ensuite proposer un large encadrement de ces deux valeurs.

Les ordres des groupes qui seront employés pour obtenir ces valeurs resteront les mêmes que ceux démontrés pour les questions 1 et 2 (puisque la démonstration fonctionnait dans un cadre général).

LES VALEURS EXTREMES

W_{MIN}

Tout d'abord on sait que $W_{min} \geq 1$.
En effet le premier ami a_i qui va entrer ne sera pas satisfait immédiatement car l'addition sera alors égale à 0 et il désire que ce soit un entier strictement positif. Il va donc appeler le serveur 1 fois.

Or il existe un groupe de k amis permettant d'obtenir $W_k = 1$.
En effet considérons le groupe de k amis d'ordre :

$$[2^k\ ;\ 2^{k-1}\ ; \dots ; 2^2; 2]\ avec\ k \in \mathbb{N}^*$$

Lorsque le premier ami entre dans le restaurant, il va appeler le serveur ($W_k = 1$) et l'addition vaudra sa valeur. ($\Sigma_1 = 2^k$).

Ensuite, quel que soit l'ami a_i d'entier 2^i ($1 \leq i \leq k-1$) alors Σ_i sera divisible par 2^i. Ainsi le serveur ne sera plus appelé et $W_k = 1$.

On a donc $W_{min} = 1$.

W_{MAX}

A présent utilisons le fait que $W_{max} \leq k$ pour un groupe de k amis.
En effet chaque ami ne peut appeler le serveur qu'une fois. Il ne peut donc être appelé plus de k fois.

Or il existe un groupe de k amis permettant d'obtenir $W_k = k$.
En effet considérons le groupe de k amis d'ordre :

$$[2\ ;\ 2^2\ ; \dots ; 2^{k-1}; 2^k]\ avec\ k \in \mathbb{N}^*$$

Montrons que dès qu'un ami entre il va appeler le serveur. Pour ce nous raisonnerons par récurrence pour montrer que l'addition du ième ami Σ_i vaut 2^i . Ainsi le (i+1)ème ami appellera le serveur en entrant et au final le serveur sera appelé k fois.

Initialisation : Vérifions ceci pour i=1 :
Lorsque le premier ami entre dans le restaurant, il va appeler le serveur et l'addition vaudra $\Sigma_1 = 2$ ce qui équivaut à 2^1.

Hérédité : Supposons que pour un entier fixé i on ait $\Sigma_i = 2^i$ et montrons que $\Sigma_{i+1} = 2^{i+1}$

$\Sigma_i = 2^i$ signifie que tous les amis inférieurs à a_i divise Σ_i.
Ainsi lorsque $a_{i+1} = 2^{i+1}$ entre il ne sera pas satisfait et va commander un plat afin de faire passer l'addition au plus petit entier acceptable, c'est-à-dire : 2^{i+1}.
Or $2^{i+1} = 2 * 2^i = 2 * \Sigma_i$ donc tous les amis inférieurs à a_i sont également satisfait.
On a donc : $\Sigma_{i+1} = 2^{i+1}$

Par conséquent on a : $\Sigma_i = 2^i \quad \forall\, 1 \leq i \leq k-1$

Le serveur sera donc appelé k fois et $W_k = k$.

On a donc $W_{max} = k$

DES ENCADREMENTS

Pour cette question nous allons simplement utiliser les résultats trouvés dans les questions précédentes afin de proposer un encadrement de W_{min} et de W_{max}

WMIN

Tout d'abord on vient de montrer qu'il est possible pour un certain groupe d'amis Ω d'avoir $W_{min} = 1$.

On a donc pour tout n naturel non nul :

$$W_{min} \geq 1$$

Par ailleurs de la même façon que lorsque Ω était un groupe n-linéaire, on a l'addition finale Σ_k qui a comme décomposition en facteurs premiers :

$$\Sigma_k = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r} \; avec \; p_i \in \mathbb{P} \; et \; \beta_i \in \mathbb{N}^* \;\; \forall i \in [1\,;r]$$

Où chaque p_i présent ici divise au moins une fois l'entier a_k d'un ami A_k.

Il y a donc pour chaque groupe de k amis l'ordre d'entrée qui consiste à faire entrer tout d'abord tous les amis de type $p_i^{\beta_i}$.

On a ainsi W_{min} qui est inférieur ou égal au nombre de nombres premiers qui divisent les a_i présents.
« Inférieur » car il est possible d'avoir moins que cette valeur, par exemple pour le groupe $\Omega = \{3; 5; 15\}$ où l'on a 2 nombres premiers divisant les a_i mais où $W_{min} = 1$.

On a donc :

$$W_{min}(\Omega) \leq \delta(\Omega)$$

Où $\delta(\Omega)$ est le nombre de nombres premiers qui divisent les a_i présents dans Ω.

Ainsi on a l'encadrement suivant :

$$\mathbf{1 \leq \boldsymbol{W_{min}}(\Omega) \leq \delta(\Omega)}$$

W_{MAX}

On vient de montrer qu'il est possible pour un certain groupe de k amis Ω d'avoir $W_{max} = k$.

On se contentera donc d'affirmer que :

$$\boldsymbol{W_{min}(\Omega) \leq W_{max}(\Omega) \leq k}$$

QUESTION 4

Le but de cette question est de déterminer les valeurs possibles de W. Ainsi nous allons nous restreindre à donner un encadrement de W à partir des questions précédentes.

Dans un premier temps nous verrons les cas des groupes n-linéaires et puis ensuite des autres groupes.

GROUPES N-LINEAIRES

Ainsi on a :

$$\Omega = \{1\,;\ 2\,;\dots;n-1\,;n\}$$

Et d'après les questions 1 et 2 on a :

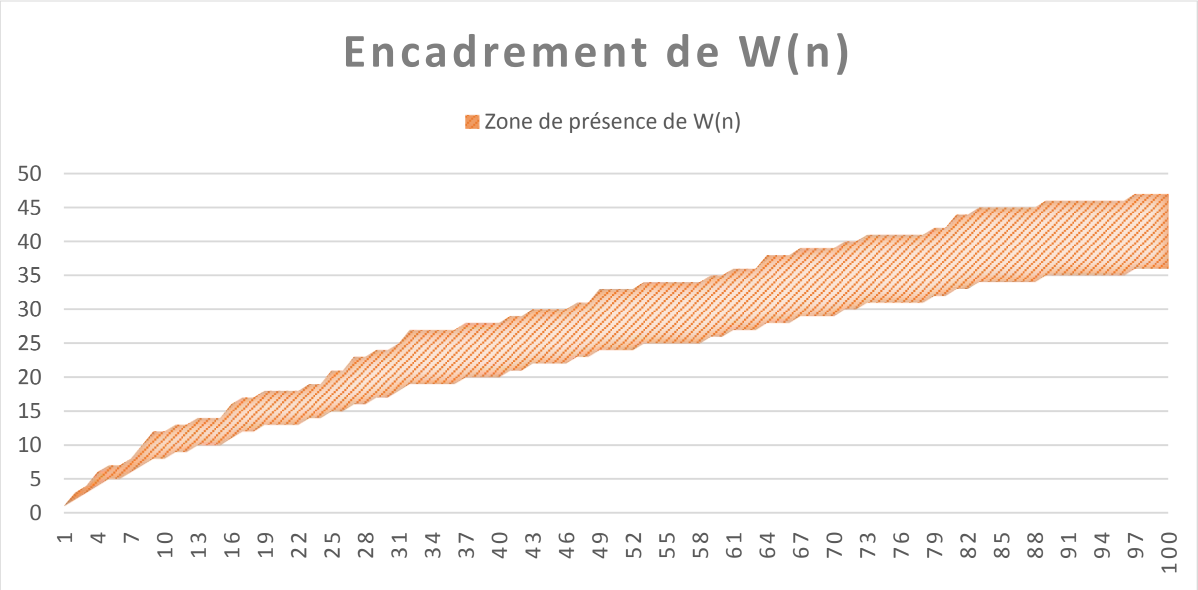
$$W_{min}(n) = \pi(n)$$

$$W_{max}\,(n) = 1 + \pi(n) + \sum_{\alpha=1}^{E(\log_2 n)} \pi\left(E\left(\sqrt[\alpha]{n}\right)\right)$$

Ainsi :

$$\boldsymbol{\pi(n) \leq W(n) \leq 1 + \pi(n) + \sum_{\alpha=1}^{E(\log_2 n)} \pi\left(E\left(\sqrt[\alpha]{n}\right)\right)}$$

On obtient donc la zone de présence de W(n) suivante pour les 100 premières valeurs :



GROUPES NON N-LINEAIRES

Ces groupes ont la forme suivante, avec pour k amis :

$$\Omega = \{a_1; a_2; \dots; a_k\} avec\ a_i > a_{i-1}\ \forall i \in [2; k]\ et\ a_i \in \mathbb{N}^*$$

D'après la question 3 on a :

$$W_{min} \geq 1$$

$$W_{max} \leq k$$

Ainsi :

$$\boldsymbol{1 \leq W(\Omega) \leq k}$$