



Depuis 80 ans, nos connaissances
bâtissent de nouveaux mondes

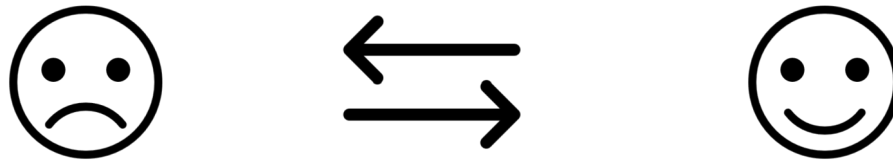
Une introduction ludique à la notion d'invariant

Robert BROUZET (LAMPS, UPVD)



Problématique

Peut-on passer d'un **état (situation, objet) A** à un **état (situation, objet) B** par un certain « **processus** » ou « **transformation** » ?



Idée d'invariant

- Si on peut attribuer à chaque état (situation, objet) « quelque chose » (nombre, structure algébrique, etc.) qui reste **invariant** au cours du processus et si ce « quelque chose » n'est pas le même en A et en B alors on ne pourra pas passer de A à B.
- Un exemple trivial : peut-on aller du lycée Jean Monnet au sommet du pic Saint-Loup en suivant une courbe de niveau ?
- Non car le processus (suivre une courbe de niveau) laisse une quantité invariante (l'altitude). Or le lycée et le sommet du Pic Saint-Loup ne sont pas à la même altitude.

Exemples issus de mathématiques « sérieuses »

Deux matrices sont-elles équivalentes ?

Deux matrices sont-elles semblables ?

Deux groupes sont-ils isomorphes ?

Deux espaces topologiques sont-ils homéomorphes ?

Deux variétés différentiables sont-elles difféomorphes ?

Etc.

Impossible mais pas que...

- Ainsi présentés, et souvent utilisés pour cela, les invariants attestent une certaine impossibilité...
- Mais ils ne jouent pas toujours un rôle négatif (condition nécessaire) et parfois peuvent fournir une CNS pour que le processus soit possible (*système complet d'invariants*).

Exemples issus de mathématiques « sérieuses »

Etats (situations, objets)	Processus	Invariant	complet
Ensembles	Être en bijection	cardinal	oui
Matrices	Être équivalentes	rang	oui
Matrices	Être semblables	Déterminant, trace	non
Matrices	Être semblables	Invariants de similitude	oui
Groupes finis	Être isomorphes	exposant	non
Espaces topologiques	Être homéomorphes	Nombre de composantes connexes	non

Trois exemples ludiques

- Poignées de main
- Fiat Lux !
- E.T. maison !

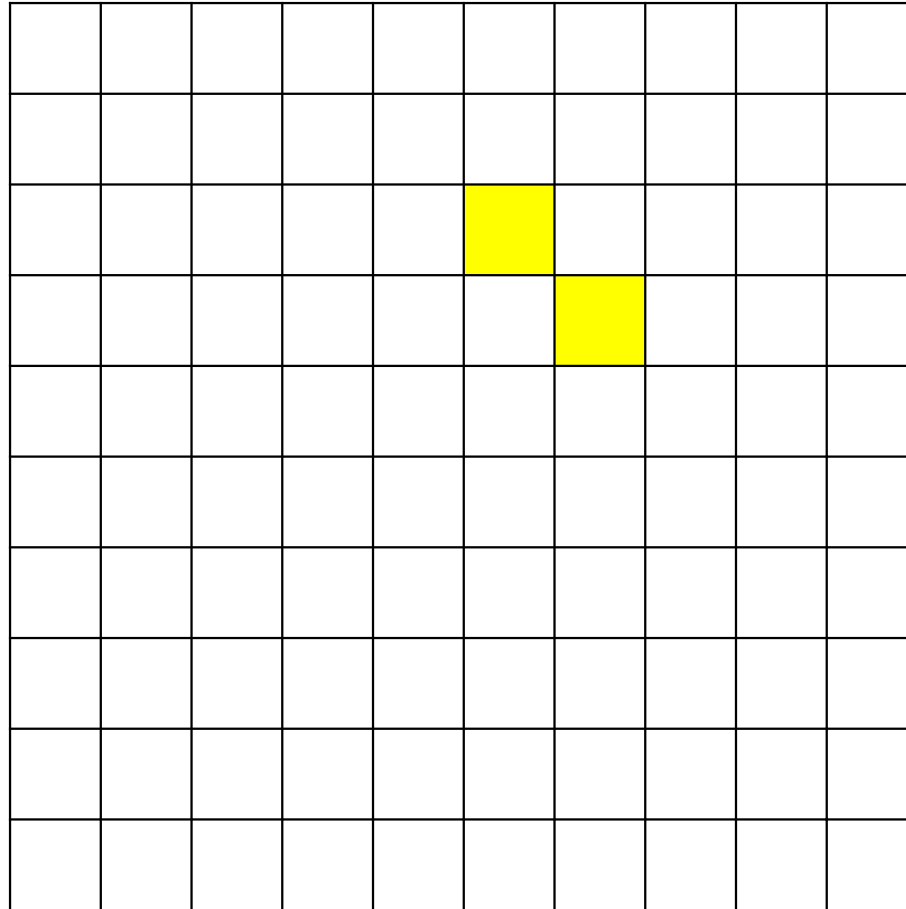
Poignées de main

- Le nombre des êtres humains ayant serré la main à d'autres un nombre impair de fois est PAIR.
- Notons N le cardinal de cet ensemble et voyons comment évolue N au cours du temps.
- Si deux « impairs » se serrent la main, ils deviennent « pairs » et donc $N \rightarrow N-2$.
- Si au contraire deux pairs se serrent la main, ils deviennent « impairs » et donc $N \rightarrow N+2$.
- Enfin si deux personnes de type différent se serrent la main ils changent de camp tous les deux et $N \rightarrow N$.
- Dans tous les cas quelque chose ne varie pas : la **parité** de N .
- Or au départ $N=0$ donc N reste pair **tout le temps** !

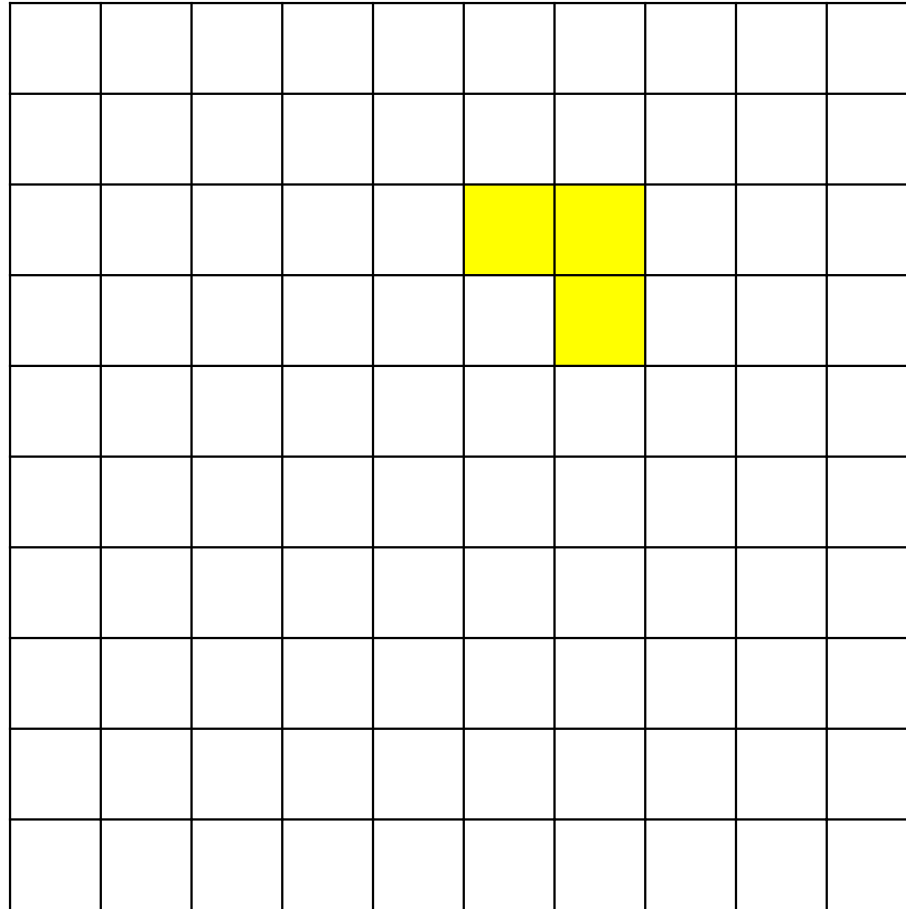
Fiat Lux !

- Le jeu : on dispose d'une grille carrée 10 par 10, chaque case étant munie d'une ampoule (éteinte au départ).
- Vous pouvez manuellement allumer un certain nombre d'ampoules de votre choix.
- Une fois votre choix effectué, un dispositif va allumer automatiquement d'autres ampoules en vertu de la règle suivante : si une case a deux côtés adjacents qui bordent une case allumée alors la case s'allume.

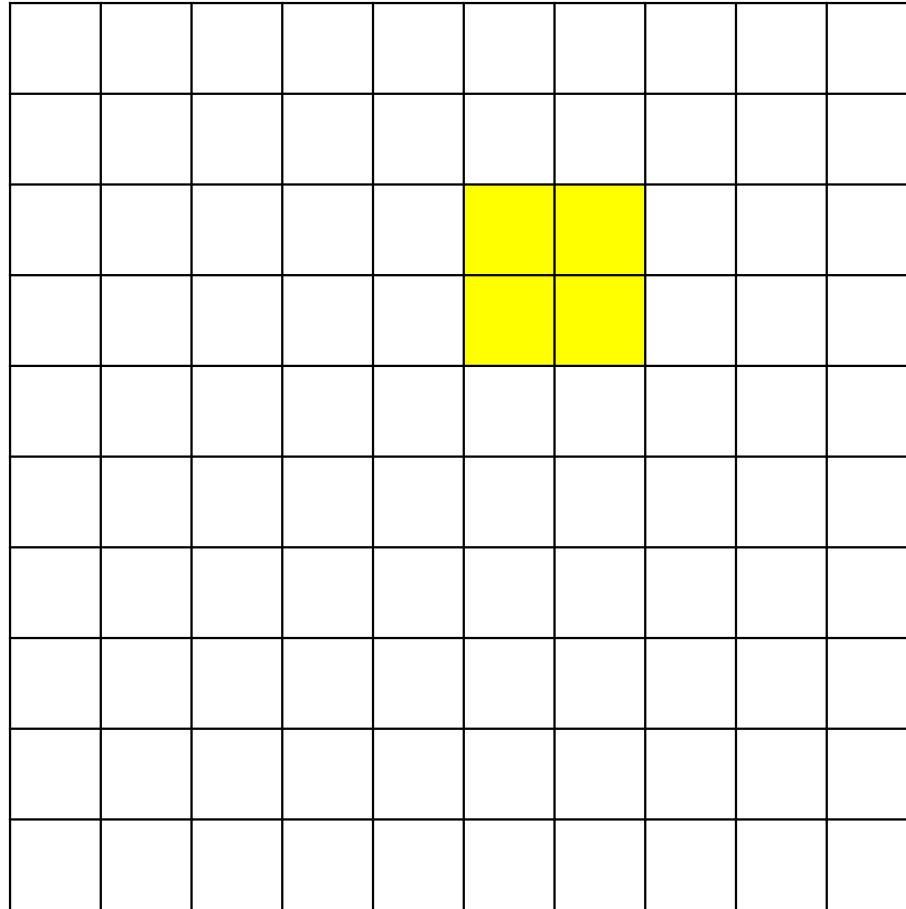
Les grandes illuminations



Les grandes illuminations



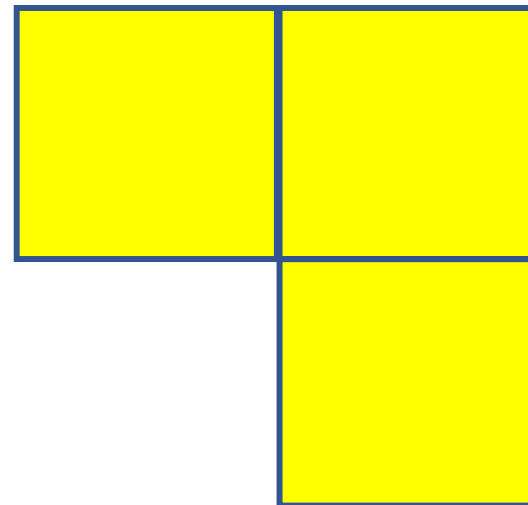
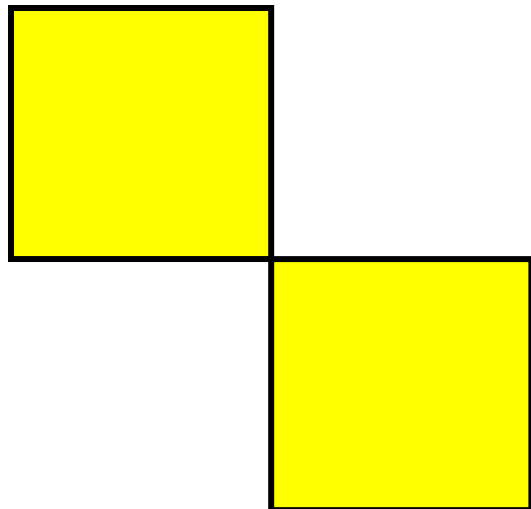
Les grandes illuminations



Question

- Combien de lampes au minimum vous faut-il allumer manuellement pour que, une fois votre choix fait, TOUTES les lampes du plateau s'allument ?
- Proposer ensuite une disposition permettant de réaliser cela.
- Où est l'invariant ? Qu'est-ce qui ne varie pas au cours de l'allumage automatique des lampes ?

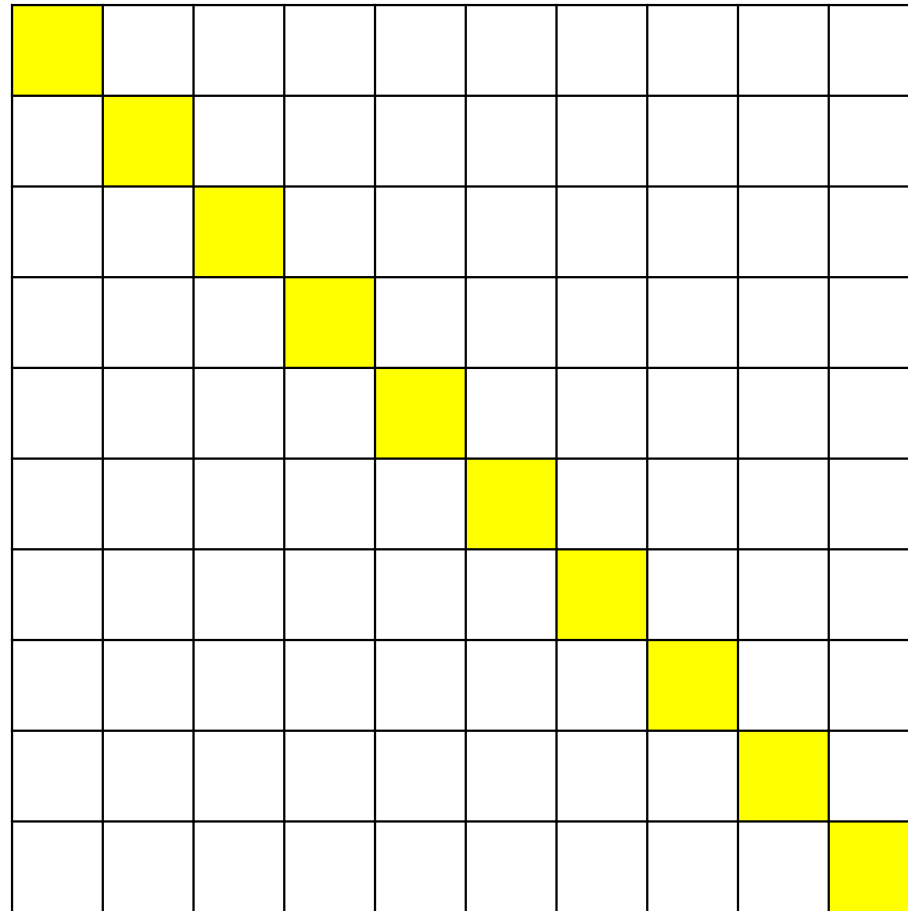
Le périmètre (extérieur) de la zone allumée

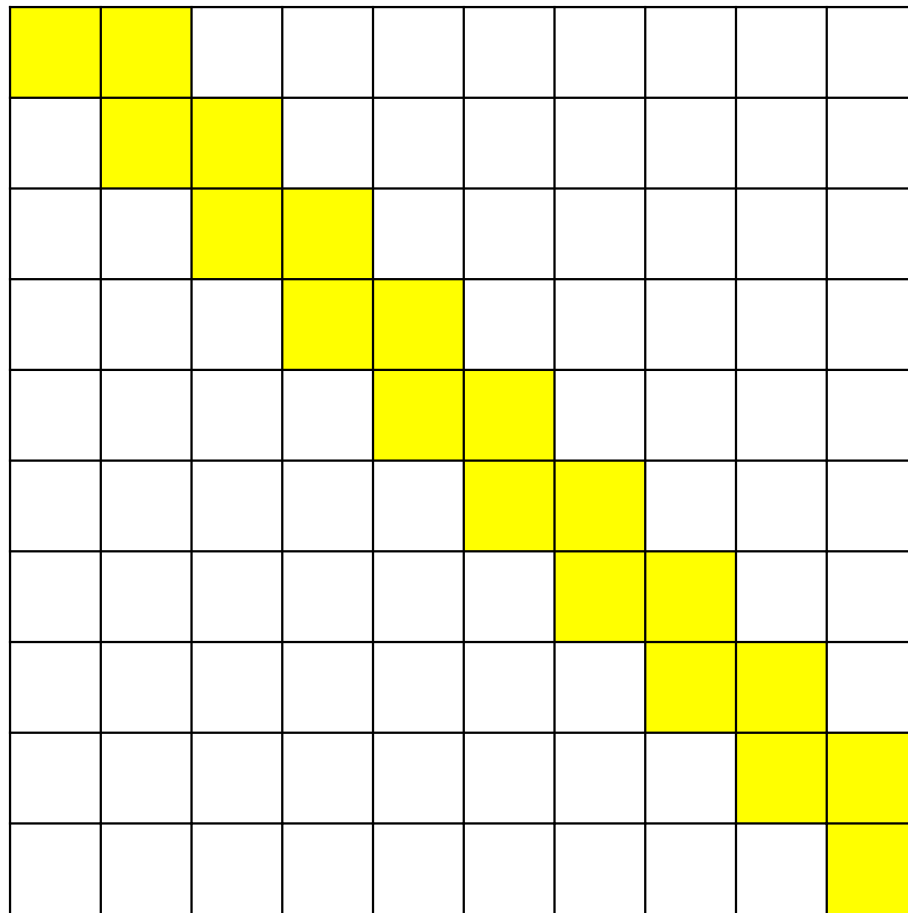


Ainsi...

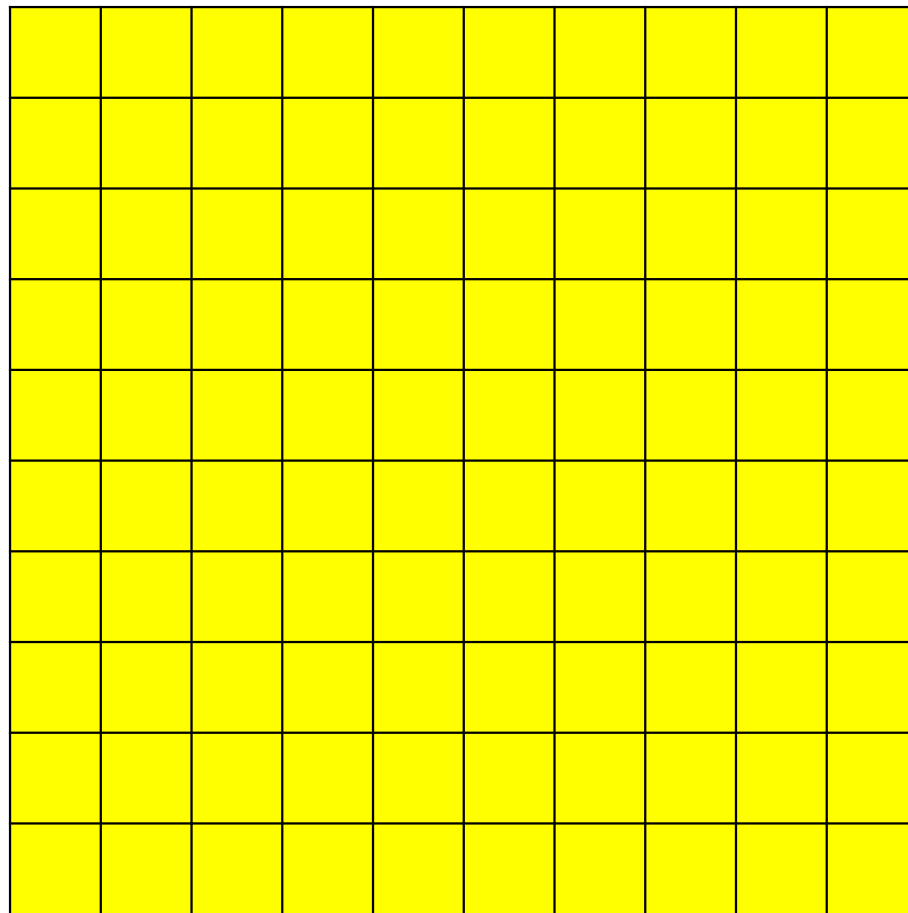
- Le périmètre extérieur de la grille étant de 40...
- Il faut allumer au moins 10 lampes...
- Sans quoi le périmètre de la zone éclairée au départ serait au maximum de 36

Une première façon...

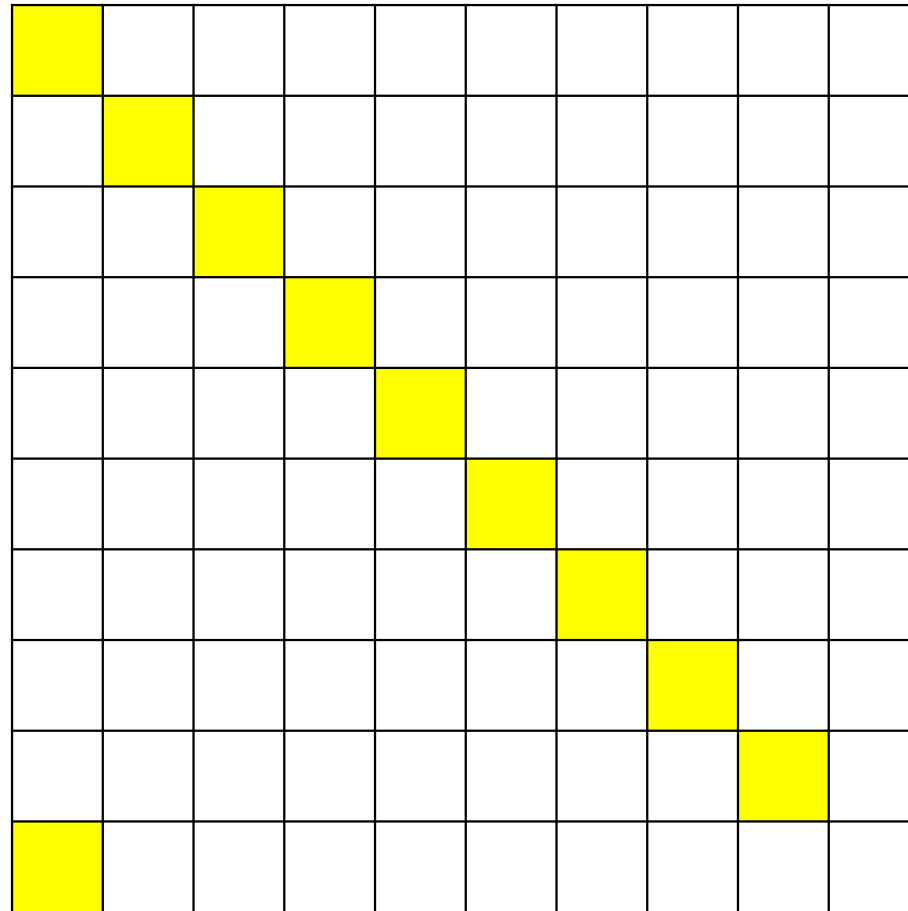




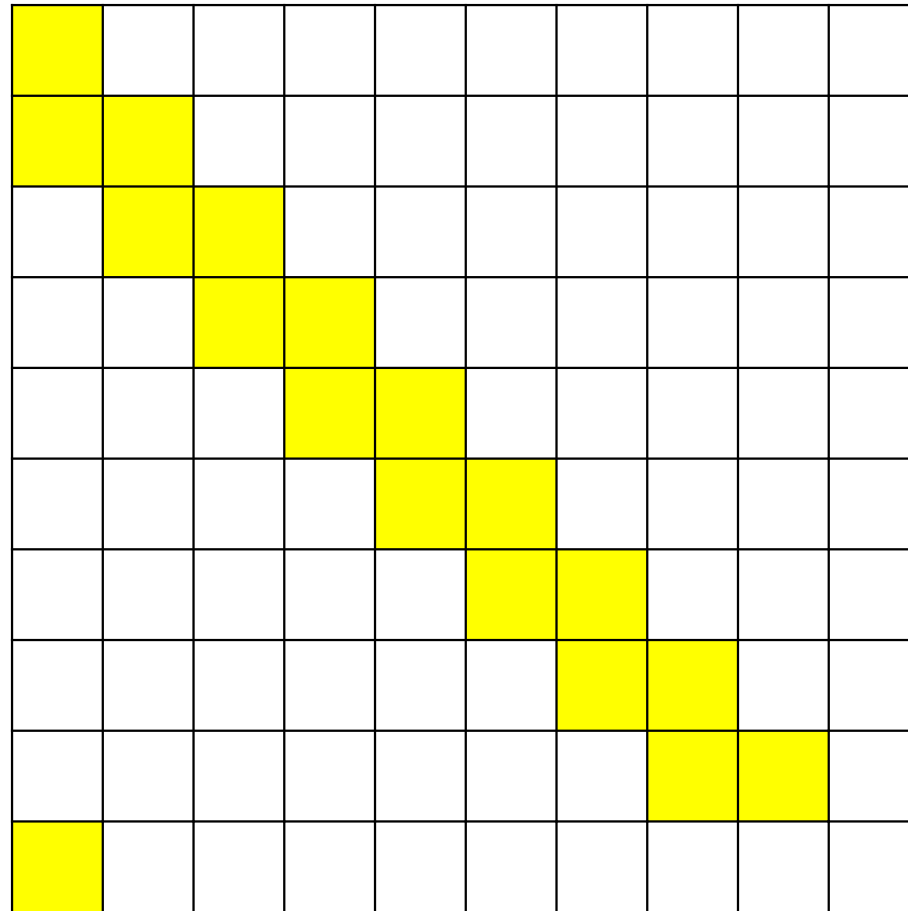
■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
□	■	■	■	■	■	■	■	■	■
□	□	■	■	■	■	■	■	■	■
□	□	□	■	■	■	■	■	■	■
□	□	□	□	■	■	■	■	■	■
□	□	□	□	□	■	■	■	■	■
□	□	□	□	□	□	■	■	■	■
□	□	□	□	□	□	□	■	■	■
□	□	□	□	□	□	□	□	■	■
□	□	□	□	□	□	□	□	□	■



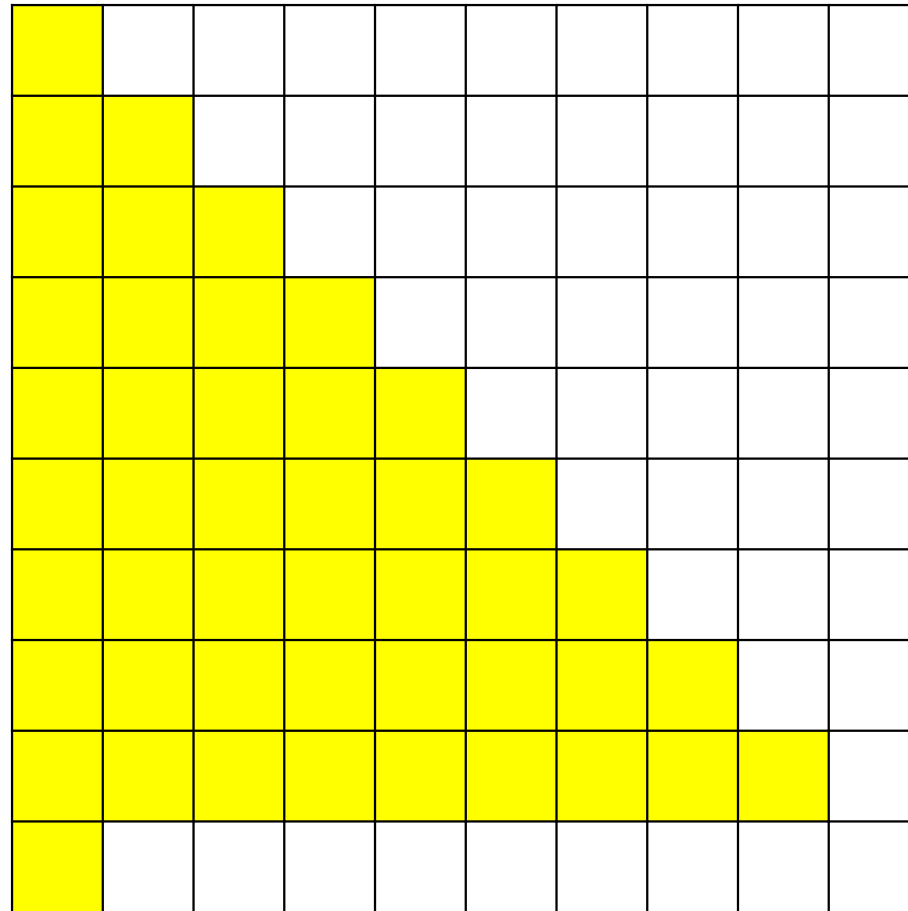
Une deuxième façon...



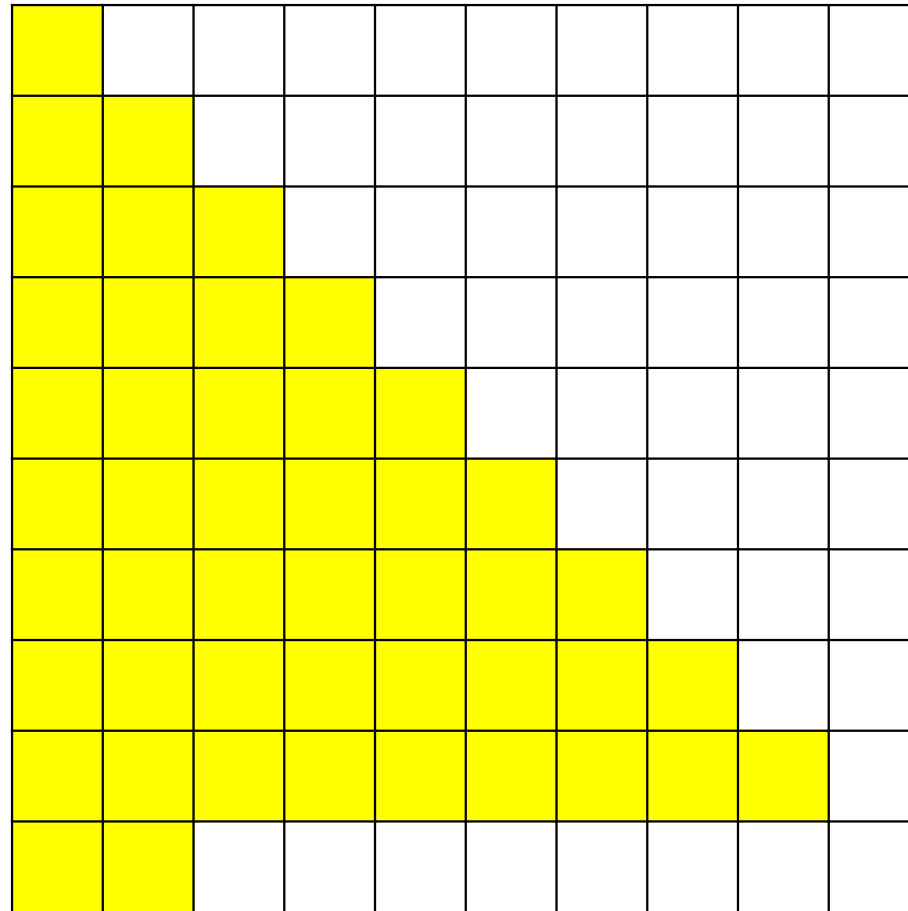
Une deuxième façon...



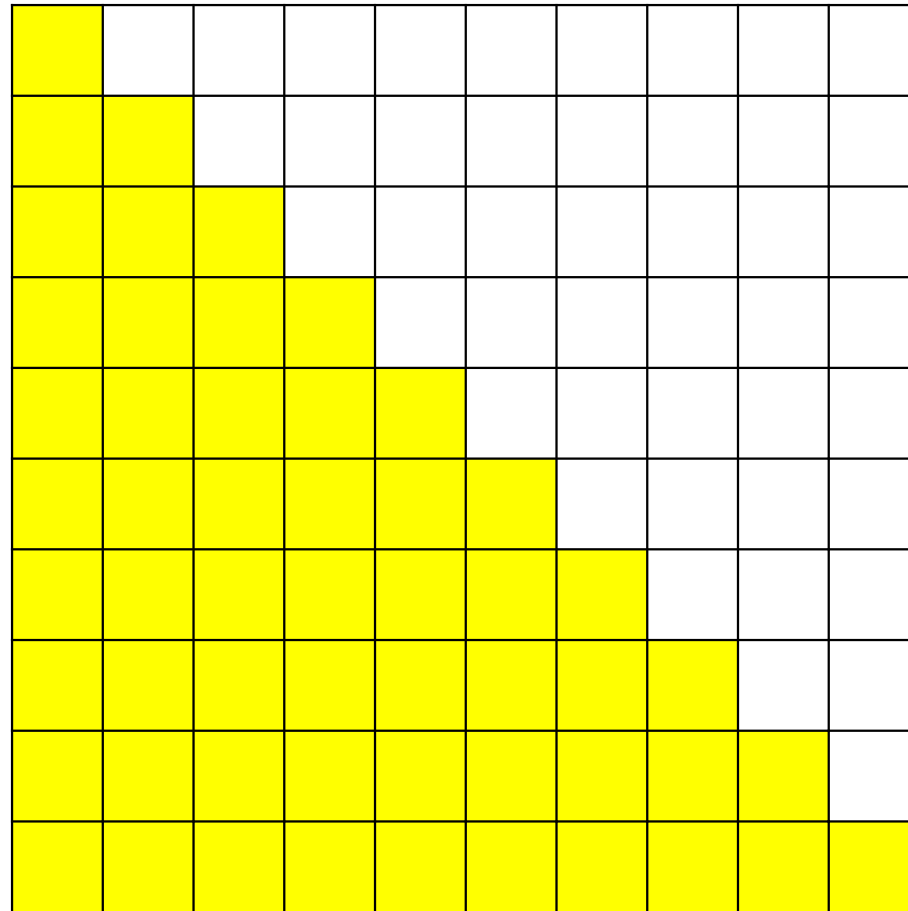
Une deuxième façon...

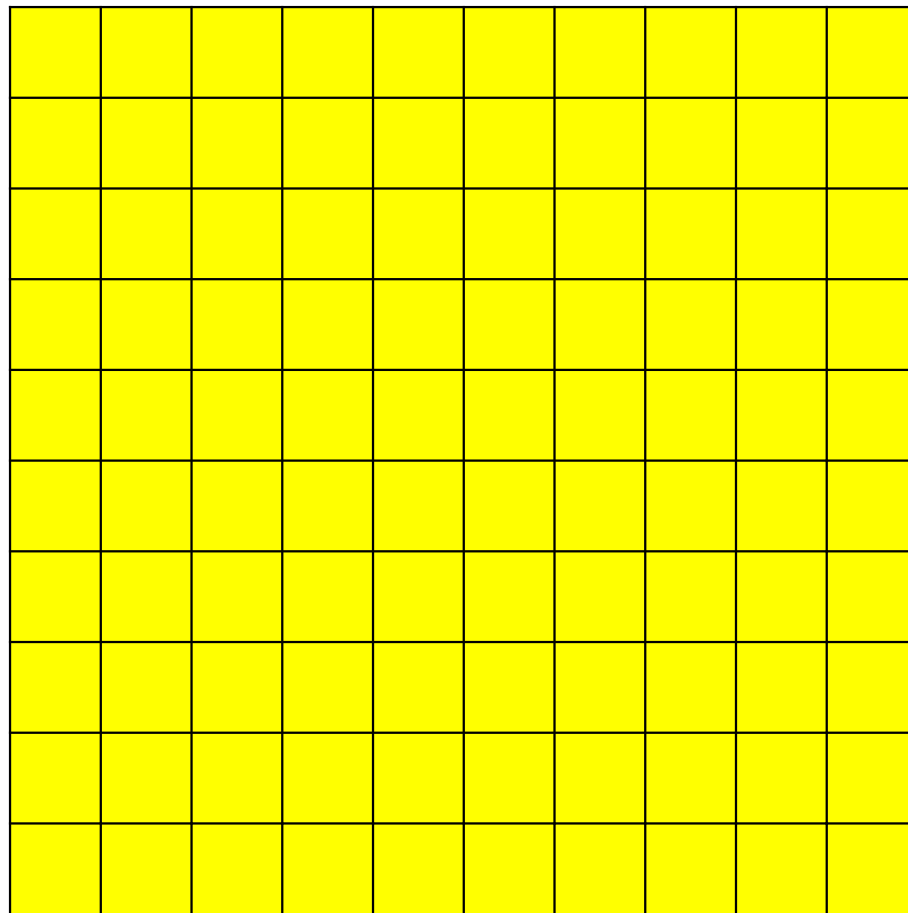


Une deuxième façon...



Une deuxième façon...





E.T. maison !

A								
A	A							

Tentative d'évasion par clonage...

A	A							
A		A						

Tentative d'évasion par clonage...

	A							
A		A						
A		A						

Tentative d'évasion par clonage...

A	A							
	A	A						
A		A						

Tentative d'évasion par clonage...

A	A							
A	A	A						
	A	A						

Pondérer les cases pour trouver un invariant

1/32								
1/16	1/32							
1/8	1/16	1/32						
1/4	1/8	1/16	1/32					
1/2	1/4	1/8	1/16	1/32				
1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32			

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$			
$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$		
$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$		$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$	
$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

La somme des poids des cases occupées ne varie pas au cours des différents mouvements des aliens.

Somme totale du quart de plan et conclusion

1/16	1/32								
1/8	1/16	1/32							
1/4	1/8	1/16	1/32						
1/2	1/4	1/8	1/16	1/32					
1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32				
2	1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32			
4									

MERCI POUR VOTRE ATTENTION ET...

BONNE ANNEE DES MATHS !