

La musique ou l'art de faire entendre les nombres

1. Ce que dit le programme

4.2 - La musique ou l'art de faire entendre les nombres	
<p>Comment l'analyse mathématique du phénomène vibratoire du son aboutit-elle à une production artistique ?</p> <p>La musique et les mathématiques sont deux langages universels. Les Grecs anciens les ont dotés d'une origine commune puisque la théorie pythagoricienne des proportions avait pour but de percer les secrets de l'harmonie musicale. Depuis, les évolutions de la musique et des mathématiques se sont enrichies mutuellement.</p>	
Savoirs	Savoir-faire
<p>En musique, un intervalle entre deux sons est défini par le rapport (et non la différence) de leurs fréquences fondamentales.</p> <p>Deux sons dont les fréquences sont dans le rapport 2/1 correspondent à une même note, à deux hauteurs différentes. L'intervalle qui les sépare s'appelle une octave.</p>	
<p>Une gamme est une suite finie de notes réparties sur une octave.</p> <p>Dans l'Antiquité, la construction des gammes était basée sur des fractions simples, (2/1, 3/2, 4/3, etc.). En effet, des sons dont les fréquences sont dans ces rapports simples étaient alors considérés comme les seuls à être consonants.</p> <p>Une quinte est un intervalle entre deux fréquences de rapport 3/2.</p> <p>Les gammes dites de Pythagore sont basées sur le cycle des quintes.</p> <p>Pour des raisons mathématiques, ce cycle des quintes ne « reboucle » jamais sur la note de départ. Cependant, les cycles de 5, 7 ou 12 quintes « rebouclent » presque. Pour les gammes associées, l'identification de la dernière note avec la première impose que l'une des quintes du cycle ne corresponde pas exactement à la fréquence 3/2.</p>	<p>Calculer des puissances et des quotients en lien avec le cycle des quintes.</p> <p>Mettre en place un raisonnement mathématique pour prouver que le cycle des quintes est infini.</p>
<p>Les intervalles entre deux notes consécutives des gammes dites de Pythagore ne sont pas égaux, ce qui entrave la transposition.</p> <p>La connaissance des nombres irrationnels a permis, au XVII^e siècle, de construire des gammes à intervalles égaux.</p>	<p>Utiliser la racine douzième de 2 pour partager l'octave en douze intervalles égaux.</p>
Prérequis et limites	
<p>La construction des gammes dites de Pythagore s'appuie sur des connaissances mathématiques acquises au collège sur les fractions et les puissances et permet de les mobiliser dans un contexte artistique. L'introduction des gammes « au tempérament égal » permet de comprendre en quoi la découverte des nombres irrationnels a des applications en dehors du champ mathématique.</p> <p>La racine douzième de 2 est introduite par analogie avec la racine carrée, en lien avec l'utilisation de la calculatrice.</p>	

2. Objectif de la séquence

Se donner les moyens théoriques (éventuellement pratiques) de fabriquer un instrument à 3 cordes de type «guitare».

3. Prérequis

Mathématiques	SVT	PC
<ul style="list-style-type: none">Utilisation d'un tableur.Notion de nombre pair et impairAlgorithmique de base	<ul style="list-style-type: none">Étude fonctionnelle de l'oreille.Perception sonore.Dangers et plaisirs liés au son.	<ul style="list-style-type: none">Phénomènes vibratoiresHarmoniquesSon et instrument (cordes)Intensité sonore

4. Organisation de la séquence

Séances(1H)	Contenu	Objectif	Ressources\Matériel
1	<ul style="list-style-type: none">Note, tension d'une corde, timbre.Association de deux notes : consonant ou dissonant ?	<ul style="list-style-type: none">Définir une note comme la hauteur d'un son.Réactiver les connaissances vues en SVT et en PCConsonance de deux notes et rapport des fréquences : intervalle	<ul style="list-style-type: none">C'est pas sorcier c'est quoi le son ? : https://www.youtube.com/watch?v=Q58ns2rLXx8Une guitare et un ampli (facultatif) ou bien vidéo dissonance : https://www.youtube.com/watch?v=I_f664RMQusDocuments sonore gamme de do 1 et 2
2	<ul style="list-style-type: none">Construire son propre instrument : le problème du manche de la guitare.	<ul style="list-style-type: none">Présenter les différentes parties d'une guitare.Faire le lien tension/note et longueur de la corde/note	<ul style="list-style-type: none">Une palette en bois (facultatif)Diaporama de construction
3	<ul style="list-style-type: none">La gamme de Pythagore (cycle des quintes)	<ul style="list-style-type: none">Définir la quinte, le cycle des quintes, la quinte du loupLe cycle des quintes est infini.	<ul style="list-style-type: none">La gamme musicale (première partie 10min41) : https://www.youtube.com/watch?v=cTYvCpLRwao
4	<ul style="list-style-type: none">La gamme tempérée	<ul style="list-style-type: none">La racine douzième permet de « reboucler »Calcul des positions des frettes de la guitare	<ul style="list-style-type: none">La gamme musicale (deuxième partie) : https://www.youtube.com/watch?v=cTYvCpLRwao
5	<ul style="list-style-type: none">Évaluation	<ul style="list-style-type: none">Évaluation de la séquence.	<ul style="list-style-type: none">

5. Déroulement des séances (1H chacune)

Séance n°1 : Les notes (Fiche prof)

Il s'agit de réactiver les connaissances vues en SVT et en PC.

Définir, comprendre la notion de son et de note.

Notamment la notion de phénomène vibratoire, de timbre (Fondamentale, harmonique).

Enfin la consonance de sons.

Séance n°1 : Déroulement

- Vidéo c'est pas sorcier(le son) : <https://www.youtube.com/watch?v=Q58ns2rLXx8>
- Lecture du doc1 et 3 p 202.
- écoute des documents sonores Gamme de do1 et 2 (identifier les instruments) ou bien utilisation d'une guitare électrique.
- Vibration d'une corde : Quelle relation existe t-il entre la longueur d'une corde et la fréquence du son émis ?

Voir si la corde de Melde a été vue en physique. $f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. Démontrer que pour une corde de guitare fixée, à tension déterminée, la fréquence émise est inversement proportionnelle à sa longueur.

Bilan :

1. Le son et les notes

Un son, c'est une vibration qui se propage dans l'air

Une note correspond à la hauteur d'un son. Elle est donc caractérisée par la fréquence fondamentale du son en hertz, mais aussi de ses harmoniques (plus ou moins perceptibles) ce qui donne le timbre.

Une corde donnée (de guitare par exemple) peut émettre un son composé (harmoniques, fondamentale).

Cela dépend de sa tension, et de sa longueur et de sa masse linéique. On retiendra que pour une tension fixée, la fréquence émise est inversement proportionnelle à sa longueur : plus elle est longue et plus le son est grave

- Guitare et Ampli ou bien vidéo dissonance (jusqu'à 2min17s seulement):

https://www.youtube.com/watch?v=I_f664RMQus

- Lecture doc 2 page 203 :

On considère que deux notes sont consonantes (elles sonnent bien ensemble) lorsque le rapport de leur fréquence est arithmétiquement simple (par exemple un entier ou une fraction simple).

Le rapport $\frac{f_1}{f_2}$ entre deux notes de fréquences f_1 et f_2 telles que $f_2 > f_1$ s'appelle un intervalle en musique.

NOTE : Apporter son ordi pour le prochain cours et finir l'exercice suivant

Exercice. Lecture du Doc 1 p 203(Pythagore)

Quelle(s) sont les notes dans le tableau ci-contre de la Gamme de Pythagore (de do à do) qui semblent répondre au critère de consonance avec un do (260,74)Hz :?

Réponses : (voir tableur Pythagore)

Gamme de Pythagore
260,74
278,44
293,33
309,03
330,00
347,65
371,25
391,11
417,66
440,00
463,54
495,00
521,48

Sol(3/2) : c'est la quinte

Fa (4/3) : C'est la quarte (renversement de la quinte)

Séance n°2 : Construction d'un instrument de musique (Fiche prof)

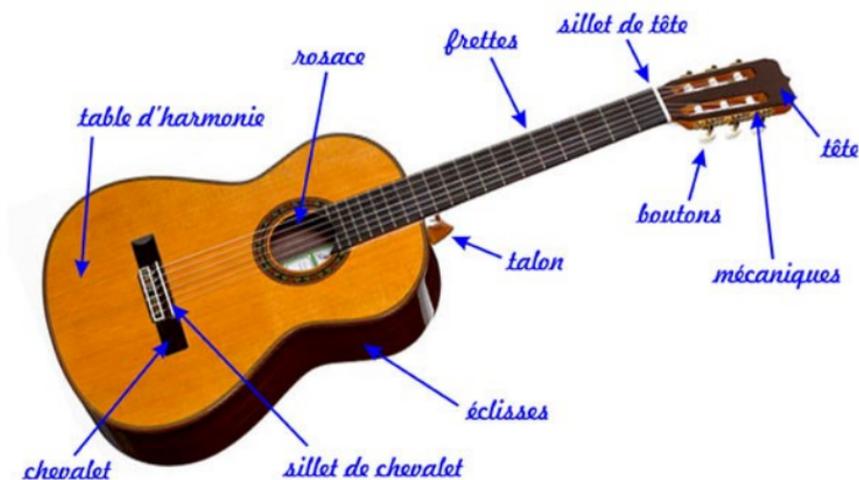
2. Comment construire un instrument à cordes ?

L'objectif est de voir comment, avec des objets de récupération, un peu de théorie et l'apport des mathématiques, on peut construire un tel instrument.

Séance n°2 : Déroulement

- Projection du diaporama : « construire un instrument de musique »
- Facultatif: La palette et le pied de biche sont sur place et on dégage la pièce de bois qui servira à faire le manche. On mange les gâteaux de la boîte en fer !

Les parties d'une guitare :



Le problème du manche et des frettes.

Exercice

En reprenant le tableau de la gamme de Pythagore, en supposant qu'une corde de guitare fait 64 cm de long, calculer la position des 12 premières frettes de la guitare à l'aide d'un tableur si la corde à vide produit un do (260,74 Hz).

Approfondissement : En calculant les positions des frettes pour deux cordes différentes (corde de Mi et corde de La pour la gamme de Pythagore), démontrer qu'il n'est pas possible de construire une guitare avec la gamme de Pythagore.

Terminer le tableur ou l'approfondissement.

Séance n°3 : La gamme de Pythagore (fiche prof)

L'objectif est de voir comment se construit la gamme de Pythagore et ses défauts.

On pourra éventuellement le rédiger sous forme d'algorithme

Séance n°3 : La gamme de Pythagore

Correction pour la gamme de Pythagore, mise en évidence des erreurs sur les différentes cordes !

Visionnage de la vidéo sur la gamme de Pythagore : Séance n°3 : (première partie 10min41) :

<https://www.youtube.com/watch?v=cTYvCpLRwao>

La gamme de Pythagore

◆ Dès l'Antiquité, la construction des gammes est basée sur des fractions simples, ($2/1$, $3/2$, $4/3$, etc.). En effet, des sons dont les fréquences sont dans ces rapports simples sont consonants, c'est-à-dire qu'ils provoquent une sensation agréable à l'écoute.

◆ Pythagore s'est servi de la pour définir sa gamme. **La quinte est l'intervalle entre deux fréquences de rapport 3 ou $3/2$ ou $3/4$...**

◆ Pour construire sa gamme, il a pris la quinte (en multipliant par 3 la fréquence) de la note de départ de sa gamme, il a obtenu une fréquence donc une note, puis il a pris la quinte de la quinte de la note de départ et ainsi de suite 12 fois pour obtenir les 12 notes de sa gamme. Si la fréquence obtenue est supérieure à l'octave de la note de départ, alors Pythagore divisait par deux autant de fois que nécessaire la fréquence de la note obtenue pour qu'elle rentre dans la gamme : écriture de l'algorithme

◆ La gamme de Pythagore est donc basée sur le cycle des quintes.

Le cycle des quintes ne reboucle jamais exactement:(voir doc1 p 204).

Preuve mathématique par égalité et parité.

Par l'absurde: Si la gamme reboucle, on a alors pour un certain entier n et un certain entier k : $\frac{3^n}{2^k} = 2$,
c'est à dire $3^n = 2^{k+1}$. Le membre de gauche est impair tandis que celui de droite est pair : impossible !

◆ La gamme de Pythagore présente un inconvénient majeur : l'intervalle entre deux notes consécutives n'est pas constant, ce qui provoque des dissonances (la plus connue est la quinte du loup).

Correction du travail précédent pour la gamme de Pythagore, mise en évidence des erreurs sur les différentes cordes !

Apporter l'ordi pour la séance suivante(tableur)

Séance n°4: La gamme tempérée (Fiche prof)

On prendra du temps pour construire une valeur approchée de $\sqrt[12]{2}$

Séance n°4: La gamme tempérée

- Visionnage de la vidéo (deuxième partie 10m41 jusqu'à la fin) :
<https://www.youtube.com/watch?v=cTYvCpLRwao>

Application aux frettes de la guitare : La gamme tempérée permet enfin de fabriquer une guitare puisque les intervalles (au sens musical) sont égaux, ce qui n'était pas possible avec la gamme de Pythagore !

Algo : comment calculer la racine douzième de 2 (par dichotomie).

Approfondissement : faire un programme en Python

◆ La gamme tempérée de Jean-Sébastien Bach comporte 12 notes dont l'intervalle vaut

$\sqrt[12]{2} \approx 1,059463\dots$, qui est un nombre irrationnel.

Sur le tableur, la longueur d'une corde étant de 64 cm, calculer la position des frettes avec la gamme tempérée.

Séance n°5 : Correction et évaluation(Fiche prof)

Correction de la partie tableur (voir tableur fréquences tempérée)

Evaluation.

Séance n°5: Correction et évaluation

Sujet :

La théorie musicale étant fondée sur des rapports de fréquences, on décide de simplifier les calculs en attribuant la valeur 1 (sans unité) à une fréquence choisie comme référence. Celle-ci correspond à une note de référence (par exemple 262 Hz pour le Do 3). On retrouve ensuite les fréquences réelles en multipliant les valeurs calculées par la fréquence de la note de référence.

La construction des gammes dites de Pythagore est basée sur le cycle des quintes : on part de la fréquence de valeur $f_0 = 1$. On construit une nouvelle fréquence, la quinte, en multipliant f_0 par $\frac{3}{2}$. On réitère ce processus pour obtenir la quinte de la quinte, et ainsi de suite. À certaines étapes, le fait de multiplier par $\frac{3}{2}$ une fréquence f comprise entre 1 et 2 peut donner une fréquence supérieure ou égale à 2. On se propose de démontrer que, si on divise par 2 la valeur obtenue, on la ramène dans l'octave.

L'algorithme ci-contre permet de calculer les fréquences dans le processus décrit précédemment.

```
f ← 1
f ←  $\frac{3}{2}$  × f
n ← 1
Tant que f ≠ 1 faire
    n ← n + 1
    f ← f ×  $\frac{3}{2}$ 
    Si f ≥ 2 alors f ← f ×  $\frac{1}{2}$ 
Fin Si
Fin Tant que
```

1.

Recopier et compléter le tableau ci-dessous en donnant les valeurs des 12 premières quintes obtenues par cet algorithme. Les résultats seront donnés d'abord sous forme exacte comme quotients d'une puissance de 2 par une puissance de 3, puis par leurs valeurs décimales approchées au centième obtenues à l'aide de la calculatrice.

Numéro de la note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fréquence (fraction irréductible)	1	$\frac{3}{2}$				$\frac{3^5}{2^7}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3^7}{2^{11}}$		$\frac{3^9}{2^{14}}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{3^{12}}{2^{19}}$
Fréquence (valeur approchée à 10^{-2} près)	1	1,5				1,9	1,42	1,07		1,20	1,80	1,35	1,01

2. L'algorithme précédent va-t-il se terminer avant la douzième fréquence ?

3. L'algorithme précédent va-t-il se terminer pour une certaine valeur de n ? Justifier soigneusement.